MƯỜI VẠN CÂU HỎI VÌ SAO



BỘ MỚI

TRI THỨC THẾ KỈ 21

TOÁN HỌC





EDIBOOKS



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Mười vạn câu hỏi vì sao *là bộ sách phổ cập khoa học dành cho lứa tuổi thanh, thiếu niên. Bộ sách này dùng hình thức trả lời hàng loạt câu hỏi "Thế nào?", "Tại sao?" để trình bày một cách đơn giản, dễ hiểu một khối lượng lớn các khái niệm, các phạm trù khoa học, các sự vật, hiện tượng, quá trình trong tự nhiên, xã hội và con người. Mục đích của cuốn sách giúp cho người đọc hiểu được các lí lẽ khoa học tiềm ẩn trong các hiện tượng, quá trình quen thuộc trong đời sống thường nhật, tưởng như ai cũng đã biết nhưng không phải người nào cũng giải thích được.*

Bộ sách được dịch từ nguyên bản tiếng Trung Quốc của Nhà xuất bản Thiếu niên Nhi đồng Trung Quốc. Do tính thiết thực tính gần gũi về nội dung và tính độc đáo về hình thức trình bày mà ngay khi vừa mới xuất bản ở Trung Quốc, bộ sách đã được bạn đọc tiếp nhận nồng nhiệt, nhất là thanh thiếu niên, tuổi trẻ học đường. Do tác dụng to lớn của bộ sách trong việc phổ cập khoa học trong giới trẻ và trong xã hội, năm 1998, Bộ sách ***Mười vạn câu hỏi vì sao*** *đã được Nhà nước Trung Quốc trao "**Giải thưởng Tiến bộ khoa học kĩ thuật Quốc gia**", một giải thưởng cao nhất đối với thể loại sách phổ cập khoa học của Trung Quốc và được vinh dự chọn là một trong "**50 cuốn sách làm cảm động Nước Cộng hoà**" kể từ ngày thành lập nước.*

Bộ sách ***Mười vạn câu hỏi vì sao*** *có 12 tập, trong đó 11 tập trình bày các khái niệm và các hiện tượng thuộc 11 lĩnh vực hay bộ môn tương ứng:* ***Toán học, Vật lí, Hoá học, Tin học, Khoa học môi trường, Khoa học công trình, Trái Đất, Cơ thể người, Khoa học vũ trụ, Động vật, Thực vật*** *và một tập* **Hướng dẫn tra cứu**. ở mỗi lĩnh vực, các tác giả vừa chú ý cung cấp các tri thức khoa học cơ bản, vừa chú trọng phản ánh những thành quả và những ứng dụng mới nhất của lĩnh vực khoa học kĩ thuật đó. Các tập sách đều được viết với lời văn dễ hiểu, sinh động, hấp dẫn, hình vẽ minh hoạ chuẩn xác, tinh tế, rất phù hợp với độc giả trẻ tuổi và mục đích phổ cập khoa học của bộ sách.

Do chứa đựng một khối lượng kiến thức khoa học đồ sộ, thuộc hầu hết các lĩnh vực khoa học tự nhiên và xã hội, lại được trình bày với một văn phong dễ hiểu, sinh động, ***Mười vạn câu hỏi vì sao*** *có thể coi như là bộ sách tham khảo bổ trợ kiến thức rất bổ ích cho giáo viên, học sinh, các bậc phụ huynh và đông đảo bạn đọc Việt Nam.*

Trong xã hội ngày nay, con người sống không thể thiếu những tri thức tối thiểu về văn hóa, khoa học. Sự hiểu biết về văn hóa, khoa học của con người càng rộng, càng sâu thì mức sống, mức hưởng thụ văn hóa của con người càng cao và khả năng hợp tác, chung sống, sự bình đẳng giữa con người càng lớn, càng đa dạng, càng có hiệu quả thiết thực. Mặt khác khoa học hiện đại đang phát triển cực nhanh, tri thức khoa học mà con người cần nắm ngày càng nhiều, do đó, việc xuất bản ***Tủ sách phổ biến khoa học*** *dành cho tuổi trẻ học đường Việt Nam và cho toàn xã hội là điều hết sức cần thiết, cấp bách và có ý nghĩa xã hội, ý nghĩa nhân văn rộng lớn. Nhận thức được điều này, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam cho xuất bản bộ sách* ***Mười vạn câu hỏi vì sao*** *và tin tưởng sâu sắc rằng, bộ sách này sẽ là người thầy tốt, người bạn chân chính của đông đảo thanh, thiếu niên Việt Nam, đặc biệt là học sinh, sinh viên trên con đường học tập, xác lập nhân cách, bản lĩnh để trở thành công dân hiện đại, mang tố chất công dân toàn cầu.*

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

1. Phải chăng số 0 chỉ có nghĩa là không có?

Trong một lớp học, thầy giáo dạy toán đặt ra cho học sinh một bài toán: "ở một cửa hàng bán máy tính vào đầu tuần có 20 máy tính. Trong suốt một tuần cửa hàng chỉ có bán kiểu máy tính này mà không hề nhập một máy nào. Vậy nếu cửa hàng sẽ còn bao nhiêu máy tính kiểu này khi đã bán hết 20 cái. Các học sinh nhanh chóng cho câu trả lời: 20 cái - 20 cái = 0. Ở đây ta có một định nghĩa về số 0: "số 0 có nghĩa là không có gì".

Như vậy thông thường số 0 có nghĩa là không có. Thế nhưng có phải số 0 chỉ hàm ý là không có, liệu ngoài ý nghĩa không có, số không có còn hàm ý gì khác nữa không?

Trong cuộc sống hàng ngày, nhiệt độ không khí ngoài trời luôn thay đổi theo thời tiết, theo mùa. Vào mùa đông, nhiệt độ ngoài trời ở các xứ lạnh thường thay đổi trên dưới 0°C. Vậy thì 0°C liệu có còn có nghĩa là không có nhiệt độ? Đương nhiên không phải như vậy. Nếu như 0°C (nhiệt độ theo thang đo Celsius) có nghĩa là không có nhiệt độ thế thì 0°F (nhiệt độ đo theo thang Fahrenheit) sẽ hàm ý điều gì, có phải lại có nghĩa không có nhiệt độ? 0°F chính là nhiệt độ thấp hơn 0°C $17^{7^\circ}/_9$, còn 0°C là nhiệt độ cao hơn 0°F $17^{7^\circ}/_9$ mà không thể nói 0° là không có nhiệt độ. Thế thì ta phải giải quyết mâu thuẫn này như thế nào đây?

Bản thân số 0 có đầy rẫy mâu thuẫn. Nếu đứng từ quan điểm tác dụng của số 0 mà xét thì khi làm phép tính cộng nhiều lần số không với nhau thì tổng số thu được vẫn là số 0. Thế có phải số 0 là số quá bé không? Mặt khác chúng ta biết là số 0 có ảnh hưởng rất lớn. Dù cho một tích số có bao nhiêu thừa số đi nữa chỉ cần có một thừa số là số 0 thì tích số thu được sẽ bằng 0. Bạn thấy số 0 ảnh hưởng có lớn không? Những mâu thuẫn loại này trong toán học không phải ít. Để giải quyết mâu thuẫn này, chúng ta cần biết tính tương đối của các khái niệm toán học, các khái niệm toán học không phải là bất biến mà luôn thay đổi. Đối với học sinh tiểu học thì số 0 có nghĩa là không có, còn đối với học sinh bậc trung học thì số 0 có thể hàm ý một sự khởi đầu. Khi tiến hành các phép tính số học, số 0 có vai trò rất lớn. Trong các máy tính điện tử thì vai trò của số 0 lại càng lớn vì trong máy tính điện tử các phép toán được thực hiện theo hệ đếm cơ số 2, bất kì các phép tính nào đều thực hiện dựa vào số 0 và số 1.

Từ khoá: *Số 0.*

2. Có phải số 0 là số chẵn?

Chúng ta đã biết trong các phép toán ở bậc tiểu học người ta gọi một số chia hết cho 2 là số chẵn, một số không chia hết cho 2 là số lẻ. Thế thì số 0 là số chẵn hay số lẻ. Khi ta nói đến số chẵn hay số lẻ nói chung là để dành cho các số tự nhiên. Số 0 không phải là số tự nhiên nên tạm thời không bàn đến. Thế nhưng có thể nghiên cứu vấn đề này không? Câu trả lời là không chỉ có thể nghiên cứu mà cần phải nghiên cứu. Không những cần nghiên cứu số 0 không phải là số tự nhiên duy nhất đã học trong thuật toán mà sau khi học đại số ở bậc trung học còn phải mở rộng khái niệm số chẵn - lẻ đến phạm vi các số âm.

Tiêu chuẩn xem xét cũng khá đơn giản: Phàm các số chia hết được cho 2 là số chẵn, số không chia hết cho 2 là số lẻ.



Cần nhấn mạnh khái niệm chia hết khi thương số là số nguyên mà phép chia không có số dư. Hiển nhiên 0 : 2 = 0, thương số 0 thu được là số nguyên nên số không là số chẵn. Tương tự, các số: -2, -4, -6, -8, -10, -360, -2578,...là các số chẵn, còn các số -1, -3, -5, -7, -249,-1683 v.v...là các số lẻ.

Từ khoá: *Số 0 là số chẵn hay số lẻ.*

3. Vì sao trong cuộc sống hằng ngày người ta lại dùng hệ đếm thập phân?

Số tự nhiên được ra đời một cách hết sức "tự nhiên". Từ thời xa xưa nhân dân lao động cần đếm số súc vật bắt được "1, 2, 3, 4,..." dần dần xuất hiện số tự nhiên. Thế nhưng làm thế nào để gọi tên và ghi lại từng số tự nhiên riêng biệt thì lại là vấn đề không tự nhiên chút nào. Khi người ta nhận biết các số đến "10" và dùng các tên gọi và ghi từng số riêng biệt thì là việc không khó lắm. Thế nhưng khi người ta biết đếm đến số "trăm", "ngàn", "vạn" thì nếu cứ theo cách cũ mà gọi tên chúng là "một trăm cái, một ngàn cái, một vạn cái và dùng các kí hiệu riêng biệt để ghi lại thì hầu như trở nên không thể được. Đã không ít người lao tâm khổ tứ tìm cách gọi tên và tìm các kí hiệu để ghi lại, thì ngay bản thân họ cũng không nhớ và ghi được chính xác các kí hiệu đó, chưa nói là dùng chúng trong việc tính toán. Trong tình hình đó việc tìm ra cách ghi và gọi tên theo cách thức "hệ đếm theo cơ số" là một phát minh vĩ đại.

Theo ngôn ngữ toán học hiện đại, hệ đếm theo cơ số là nếu chọn trước một số tự nhiên $p > 1$ và nếu có một số tự nhiên A thoả mãn điều kiện $p^n \le A \le p^{n+1}$, ta có thể biểu diễn A dưới dạng:

$$A = a_0 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^n \ (a_n \neq 0).$$

trong đó $0 \le a_i \le p$

Vì p quyết định bước tiến của dãy số nên người ta gọi p là cơ số của hệ đếm. Nếu chọn trước p số tự nhiên và ghi theo thứ tự từ 0 đến $p-1$, trong đó p là cơ số của hệ đếm tự nhiên thì ta có thể dùng phương pháp "ghi số theo vị trí" và số A đã cho ở trên có thể viết thành $A = a_na_{n-1} \ldots a_1a_0$, trong đó ai là một trong p kí hiệu đã chọn. Phương pháp "ghi theo vị trí" được phát minh sớm nhất ở Trung Quốc, là một trong những cống hiến quan trọng của các nhà toán học cổ Trung Quốc.

Cách mô tả vừa trình bày trên đây quả thực không dễ hiểu lắm. Thế nhưng các bạn hãy tưởng tượng p được chọn là 10. Bây giờ chúng ta dùng các con số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 là các kí hiệu các chữ số từ 0 đến 10. Dùng các chữ số này ta có thể ghi bất kì số tự nhiên nào theo phương pháp "ghi theo vị trí". Ví dụ với số 347804, thực tế đây chính là số:

$4 + 0 \times 10 + 8 \times 10^2 + 7 \times 10^3 + 4 \times 10^4 + 3 \times 10^5$

Dễ dàng nhận thấy điều kì diệu của hệ đếm theo cơ số là có thể dùng một số hữu hạn các kí hiệu để biểu diễn vô hạn các số lớn đến bao nhiêu cũng được, cũng như dễ dàng nhận biết các số lớn nhỏ và rất tiện lợi khi thực hiện các phép toán số học. Việc phát minh hệ đếm theo cơ số làm cho nhận thức của loài người với các con số đạt đến một trình độ mới.

Các bạn cũng dễ dàng nhận thấy có thể dùng bất kì một số tự nhiên *p* bất kì để làm cơ số cho một hệ đếm nhưng thông thường trong cuộc sống hằng ngày người ta vẫn hay dùng “hệ đếm cơ số 10” hay “hệ đếm thập phân”. Các bạn cũng dễ dàng nhận thấy là người xưa chắc đã không dùng cách mô tả trừu tượng như đã trình bày ở trên để định nghĩa hệ đếm thập phân. Thế tại sao hệ đếm thập phân lại được toàn thể loài người chấp nhận ngay từ đầu?

Thực ra điều này có lí do hết sức đơn giản, đó là do hai tay của chúng ta có 10 ngón.

Trong thời đại xa xưa, trình độ sản xuất vốn rất thấp, chỉ cần những số đếm đơn giản, 10 ngón tay tự nhiên trở thành một “máy tính” sớm nhất. Trong sách xưa từng có thành ngữ “đếm trên đầu ngón tay” (co ngón tay để đếm) nên có thể thấy “co ngón tay” đếm số là cách đếm ra đời sớm nhất. Thói quen này vẫn còn vết tích trong đời sống xã hội ngày nay: Các em nhỏ ở các vườn trẻ vẫn thường dùng ngón tay để đếm số; những người lớn khi nói chuyện với nhau vẫn dùng các ngón tay để ra dấu về các con số nào đó. Khi trình độ sản xuất đạt đến trình độ cao, thành tựu lao động đã đạt đến số lớn và vượt qua con số 10. Bấy giờ việc dùng “ngón tay đếm số” đã không còn thích hợp nữa. Thế nhưng con người vẫn chưa từ bỏ thói quen dùng ngón tay để đếm số và thường thuận tay dùng ngón tay để làm “máy tính” với việc có thể dùng thêm công cụ để trợ giúp, ví dụ có thể dùng những viên đá, cành cây thay thế khi các ngón tay đã sử dụng hết để có thể dùng lại các ngón tay để đếm. Sau nhiều lần lặp đi, lặp lại cách tính toán, tổng kết kinh nghiệm, loài người đã phát minh hệ đếm thập phân.

Như vậy có thể thấy tổ tiên của con người, do nhu cầu của đời sống, sản xuất, xuất phát từ điều kiện của bản thân mình, không ngừng tích luỹ kinh nghiệm, tổng kết kinh nghiệm mà đã phát minh hệ đếm thập phân. Do hệ đếm thập phân có mối liên hệ tự nhiên với cuộc sống, nên đã được xã hội loài người tiếp thu, truyền bá và trở thành một bộ phận không thể tách rời với cuộc sống của chúng ta.

Trong lịch sử xã hội loài người, người ta còn thấy có nhiều hệ đếm khác. Ví dụ khi nói đến việc đo độ, người ta hay dùng “hệ đếm cơ số 60”; một độ có 60 phút, một phút có 60 giây; Trong hệ thống cân đo cũ ở Trung Quốc, người ta dùng đơn vị một cân có 16 lạng - đó là “hệ đếm cơ số 16”; trong bát quái dùng cả hai hệ đếm “nhị phân” và “hệ đếm cơ số 8”. Ở một số nước còn có “hệ đếm cơ số 12”: cứ 12 vật phẩm gọi là một tá, 12 tá gọi là một “rá”. Đương nhiên là các hệ đếm vừa kể chỉ được sử dụng trong một số lĩnh vực hẹp và hạn chế (về không gian, địa điểm), không được hoàn thiện và rộng rãi như hệ đếm thập phân.

Ngày nay loài người đã bước vào thời đại của các máy tính điện tử, thời đại của công nghệ thông tin. Điều dễ cảm nhận là máy tính điện tử không có mối liên hệ tự nhiên với hệ đếm thập phân như ở con người với hệ đếm thập phân, máy tính điện tử lại có mối liên hệ tự nhiên với hệ đếm cơ số hai hay hệ đếm nhị phân.

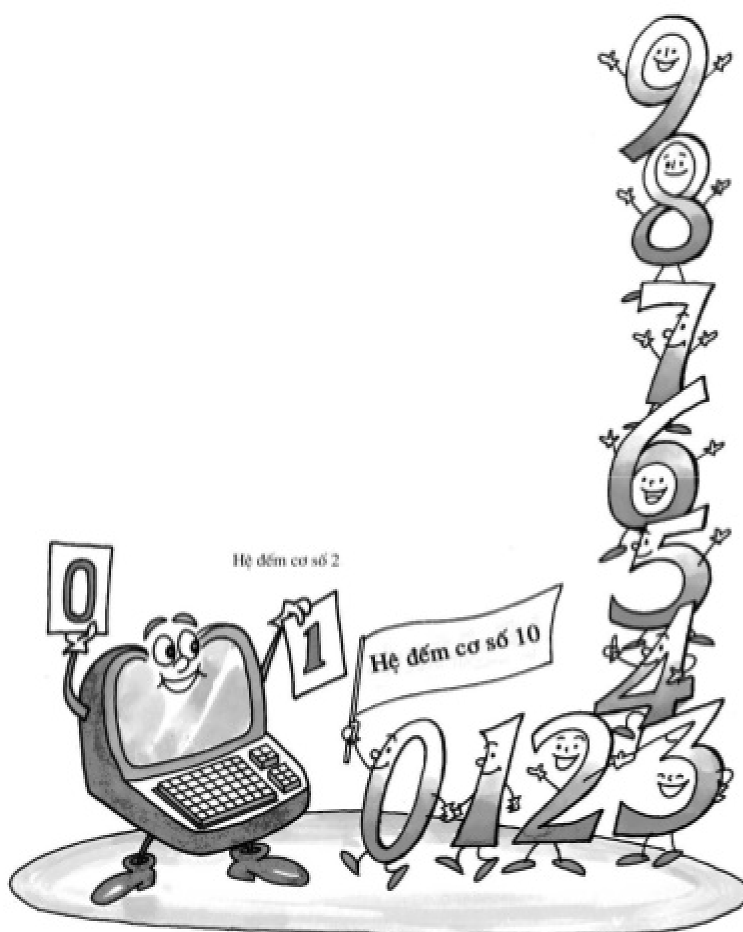
Từ khoá: *Hệ đếm thập phân.*

4. Vì sao máy tính điện tử lại cần hệ đếm nhị phân?

Vì trên hai bàn tay có 10 ngón tay mà loài người đã phát minh ra hệ đếm thập phân. Máy tính điện tử rõ ràng không có mối liên hệ tự nhiên với hệ đếm thập phân vì về mặt lí luận cũng như ứng dụng thật khó có mối liên hệ trực tiếp, liên thông với hệ đếm thập phân. Nhưng tại sao máy tính điện tử và hệ đếm thập phân không có mối liên hệ tự nhiên? Mối quan hệ tự nhiên giữa máy tính và cách ghi số là ở chỗ nào?

Để giải đáp câu hỏi này ta phải xuất phát từ nguyên lí hoạt động của máy tính. Máy tính điện tử làm việc được nhờ có dòng điện. Xét một tiếp điểm trong mạch điện tử chỉ có hai trạng thái liên quan đến sự cho dòng điện chạy qua mạch: đóng mạch và mở mạch. Máy tính lưu giữ thông tin nhờ băng từ hoặc đĩa từ: với đĩa từ ở mỗi điểm ghi chỉ có hai trạng thái: được từ hoá và không được từ hoá. Trong những năm gần đây phương pháp ghi thông tin trên đĩa quang ngày càng phổ biến. Mỗi điểm ghi trên đĩa quang chỉ có hai trạng thái: hoặc lõm hoặc lồi có tác dụng khác nhau rõ rệt hoặc tụ ánh sáng hoặc gây tán xạ ánh sáng. Do vậy có thể thấy nếu máy tính ghi nhận thông tin thông qua các phương tiện trung gian thì đều thông qua hai trạng thái của các phương tiện trung gian. Người ta chứng minh được rằng nếu dùng máy tinh ghi số theo hệ đếm thập phân sẽ gây khá nhiều lãng phí. (Ví như để ghi một số có một chữ số theo hệ đếm thập phân ít nhất cần đến bốn điểm ghi - có thể đến 16 trạng thái - và có đến sáu trạng thái không được sử dụng).

Thế thì máy tính điện tử cần ghi số theo hệ đếm nào? Xuất phát từ hệ quả mỗi phương tiện trung gian đều có các điểm ghi thông tin ứng với hai trạng thái, nên điều dễ thấy là dùng hệ đếm nhị phân sẽ có sự thích hợp tự nhiên.



Trong hệ đếm nhị phân, để ghi các con số chỉ cần hai kí hiệu 0 và 1. Có thể dùng số 1 biểu diễn cho qua dòng điện và 0 biểu diễn sự ngắt dòng điện; hoặc 1 là trạng thái bị từ hoá và 0 là trạng thái không bị từ hoá; hoặc 1 chỉ điểm lõm và 0 chỉ điểm lồi. Từ đó cho thấy hệ đếm cơ số 2 thích hợp cho việc ghi nhận thông tin trong các máy tính khi các thông tin được mã hoá bằng các chữ số. Theo ngôn ngữ máy tính, một con số ghi theo hệ đếm nhị phân là một bit, tám bit được gọi là một kí tự (byte).

Việc dùng hệ đếm nhị phân trong máy tính quả là rất tự nhiên, nhưng đứng về phương diện giao lưu giữa máy và người thì cũng có nhược điểm quan trọng là các số tự nhiên ghi theo hệ đếm nhị phân viết rất dài. Như con số 1000 trong hệ đếm thập phân nếu viết dưới dạng hệ đếm nhị

phân sẽ là 1100001101010000, quả là rất dài.

Để giải quyết khó khăn này, trong lí thuyết về máy tính người ta sử dụng hai hệ đếm bổ trợ là các hệ đếm cơ số tám và hệ đếm cơ số 16. Nhờ đó một con số có ba chữ số trong hệ đếm cơ số hai sẽ là một con số có một chữ số trong hệ đếm cơ số tám chỉ bằng 1/3 độ dài của con số viết theo hệ đếm cơ số hai, so với con số viết theo hệ đếm cơ số tám không khác mấy so với con số viết theo cơ số 10. Ví dụ con số 100.000 viết theo hệ đếm cơ số tám sẽ là 303240. Tương tự một con số có một chữ số viết theo hệ đếm cơ số 16 đại diện cho một con số có 4 chữ số trong hệ đếm cơ số hai. Một kí tự tương ứng với một con số có hai chữ số trong hệ đếm cơ số 16. Trong hệ đếm cơ số 16 cần có 16 kí hiệu độc lập. Thực tế người ta dùng chữ số tự nhiên 1,2 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 và các chữ cái A, B, C, D, E, F đại diện cho các số 10, 11, 12, 13, 14, 15 (các chữ số trong hệ đếm thập phân). Như vậy con số 100.000 được viết là 186A0. Việc chuyển đổi từ hệ đếm nhị phân sang hệ đếm cơ số tám và cơ số 16 khá đơn giản; và việc phối hợp sử dụng hệ đếm cơ số tám và cơ số 16 sẽ tránh được phiền phức khi viết những con số quá dài trong hệ đếm cơ số hai. Hệ đếm cơ số 8 và cơ số 16 đã trợ giúp đắc lực cho việc giao lưu giữa người và máy tính.

Từ khoá: *Hệ đếm cơ số 10; Hệ đếm cơ số 2; Hệ đếm cơ số 8; Hệ đếm cơ số 6.*

5. Vì sao khi đo góc và đo thời gian lại dùng đơn vị đo theo hệ cơ số 60?

Đơn vị đo thời gian là giờ, đơn vị đo góc là độ, nhìn bề ngoài chúng không hề có mối liên quan gì với nhau. Thế tại sao chúng lại được chia thành các đơn vị nhỏ có tên gọi giống nhau là phút và giây? Tại sao chúng lại sử dụng cùng hệ đếm cơ số 60?

Nghiên cữu kĩ hơn một chút ta sẽ thấy hai loại đơn vị đo lường này quả có mối liên hệ hết sức mật thiết với nhau. Ngay từ thời cổ đại, do nhu cầu của lao động sản xuất, con người phải nghiên cứu thiên văn và đặt ra lịch pháp và vì vậy có sự đụng chạm tự nhiên với việc đo góc và đo thời gian. Khi nghiên cứu sự thay đổi đêm ngày, người ta phải quan sát sự chuyển động tự quay của Trái Đất. Và rõ ràng góc của chuyển động tự quay và thời gian là có liên quan mật thiết với nhau. Vì trong lịch pháp người ta cần độ chính xác rất cao trong khi đó đơn vị đo "giờ" và đơn vị đo "độ" là rất lớn nên cần phải tìm các đơn vị đo nhỏ hơn. Các đơn vị nhỏ hơn để đo thời gian và góc phải có tính chất chung là: Đơn vị nhỏ này phải có bội số là $^1/_2$,$^1/_3$,$^1/_4$,$^1/_5$,$^1/_6$. Nếu lấy $^1/_{60}$ làm đơn vị thì hoàn toàn đáp ứng được yêu cầu đó. Ví dụ $^1/_2$ chính là 30 lần của $^1/_{60}$,$^1/_3$ là 20 lần của $^1/_{60}$,$^1/_4$ là 15 lần của $^1/_{60}$ ...

Trong toán học, người ta chọn đơn vị $^1/_{60}$ gọi là "phút" và kí hiệu "," (dùng cho đo góc) và ph hoặc min (dùng cho đo thời gian) và dùng đơn vị $^1/_{60}$ của phút là "giây", kí hiệu ",," (dùng cho đo góc) và s (dùng cho đo thời gian). Thời gian và góc đều lấy phút và giây làm các đơn vị nhỏ là vì thế.

Dùng các đơn vị hệ đếm cơ số 60 trong nhiều trường hợp cũng có nhiều thuận lợi. Ví dụ số $^1/_3$ nếu dùng hệ đếm thập phân thì phải biểu diễn thành một số lẻ vô hạn, trong khi dùng hệ đếm cơ số 60 thì được biểu diễn bằng một số nguyên.

Hệ đếm cơ số 60 đã được các nhà khoa học trên thế giới dùng trong thiên văn và lịch pháp và còn được duy trì cho đến ngày nay.

Từ khoá: *Đo thời gian; Đo góc; Hệ đếm cơ số 60.*

6. Làm thế nào để nhận biết một số tự nhiên chia hết

cho 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11?

Việc phán đoán về tính chia hết của một số tự nhiên cho một số tự nhiên khác là một yêu cầu thường gặp trong cuộc sống. Đương nhiên nếu trong tay bạn có một máy tính, bạn chỉ cần đặt một phép tính hợp lý là tính toán xong. Khi số chia là số đơn giản (ví dụ số có một chữ số) thì có thể dùng một số quy tắc phán đoán. Khi các bạn nắm được các quy tắc thì không cần có máy tính, bạn cũng có thể giải bài toán về tính chia hết khá nhanh chóng.

Quy tắc phán đoán về tính chia hết có hai loại: Một là, xem chữ số cuối hoặc mấy chữ số cuối của các con số như ở các mục 1 và 2, sau đây; hai là tính tổng các chữ số trong con số hoặc xem xét các hệ số thích hợp cho các tổng mà phán đoán như ở các mục từ 3 đến 6.

1. Một số tự nhiên là số lẻ sẽ không chia hết cho 2; một số chẵn chia hết cho 2. Ví dụ các số 0, 2, 4. 6,...sẽ chia hết cho 2, còn các số lẻ như 1,3, 5, 7,...không chia hết cho 2.

2. Một số tự nhiên sẽ chia hết cho 5 nếu chữ số cuối của số đó là số 0 hoặc 5; một số tự nhiên chia hết cho 25 nếu hai chữ số cuối của số đó là 00, 25, 50 hoặc 75, ví dụ số 120795 có thể chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 25.

3. Một số chia hết cho 3 khi tổng các chữ số của số đó chia hết cho 3. Một số chia hết cho 9 nếu tổng các chữ số của số đó chia hết cho 9. Ví như số 147345 thì tổng các chữ số của số đó là 5 + 4 + 3 + 7 + 4+ 1 = 24 chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9 nên số trên chỉ chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9.

Vì sao lại có quy tắc dự đoán khá đơn giản như vậy?

Giả sử cho số:

$A = a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + 10^3a_3 + ...$

trong đó a_0, a_1, a_2, a_3...là chữ số hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn...của số A; ta có thể viết:

$A = a_0 + 10a_1 + 102a_2 + 103a_3 + ...$

$= [(10 - 1) a_1 + (10^2 - 1)a_2 + (10^3 -1) a_3] + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 +...)$.

Dễ dàng nhận thấy 10n-1 là bội số của 3 và 9 vì vậy nếu số hạng thứ hai của biểu thức số *A (biểu thức trong ngoặc đơn)* viết ở trên là bội số của 3 và 9 thì số A sẽ chia hết cho 3 và 9. Từ đó ta đi đến quy tắc nếu $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + ...$ là bội số của 3 hoặc 9 thì số *A* chia hết cho 3 hoặc 9.

4. Một số chia hết cho 4 nếu tổng của chữ số hàng đơn vị và chữ số hàng chục nhân đôi chia hết cho 4 thì số đó chia hết cho 4. Một số tự nhiên chia hết cho 8 nếu tổng của chữ số hàng đơn vị cộng với chữ số hàng chục nhân đôi và chữ số hàng trăm nhân 4 chia hết cho 8 thì số đó chia hết cho 8. Ví dụ số 1390276 chia hết cho 4 vì 6 + 2 x 7 = 20 chia hết cho 4 nên số 1390276 chia hết cho 4. Số 1390276 không chia hết cho 8 vì theo quy tắc 6 + 2 x 7 + 4 x 2 = 28 không chia hết cho 8.

Cách chứng minh quy tắc vừa nêu cũng tương tự như cách chứng minh ở 3.

Ta viết ví dụ:

$A = [(10 - 2) a_1 + (10^2 - 4)a_2 + 10^3a_3 + ...] +(a_0 + 2a_1 + 4a_2)$.

Dễ dàng nhận thấy biểu thức trong ngoặc vuông là bội số của 8 và *A* sẽ chia hết cho 8 nếu hạng

số thứ hai của *A* phía bên phải (biểu thức trong ngoặc đơn) là bội số của 8.

5. Một số chia hết cho 11 nếu hiệu số của tổng các số chẵn và tổng các chữ số hàng lẻ là bội số của 11. Ví dụ với số 268829 tổng các chữ số ở hàng lẻ 9 + 8 + 6 = 23, tổng các chữ số hàng chẵn là 2 + 8 + 2 = 12 hiệu của chúng đúng bằng 11 nên số này sẽ chia hết cho 11. Lại như với số 1257643 thì hiệu của hai tổng các chữ số là (3 + 6 + 5 + 1) - (4 + 7 + 2) = 2. Vì không phải là bội số của 11 nên số này không chia hết cho 11. Để chứng minh quy tắc ta viết:

$$A = [(10 + 1)a_1 + (10^2 - 1)a_2 + (10^3 + 1)a_3 + (10^4 - 1)a_4 +...] + [(a_0 + a_2 +...) - (a_1 + a_3 + ...)].$$

Số hạng thứ nhất của A là bội số của 11 nên nếu số hạng thứ hai là bội số của 11 (hiệu của tổng các chữ số ở hàng chẵn và các chữ số ở hàng lẻ) đương nhiên là A sẽ chia hết cho 11.

6. Chứng minh quy tắc chia hết cho 7 khá phức tạp mà ý nghĩa thực tiễn lại hạn chế nên ở đây chỉ giới thiệu quy tắc mà không đi sâu vào cách chứng minh.

Bạn hãy nhớ kĩ dãy hệ số tuần hoàn sau đây: 1, 2, 3, -1, -2, -3, 1, 3, 2,...

Muốn phán đoán về tính chia hết của một số tự nhiên bất kì có chia hết cho 7 hay không các bạn hãy nhân các chữ số với dãy số đã nêu, sau đó tính tổng số của chúng. Ví dụ, bạn hãy nhân các chữ số bắt đầu từ chữ số đơn vị là hệ số 1, chữ số hàng chục là hệ số 3, chữ số hàng trăm với hệ số 2, chữ số hàng ngàn với hệ số -1, v.v. rồi tính tổng đại số của các tích thu được. Nếu tổng số vừa tính được chia hết cho 7 thì số đó sẽ chia hết cho 7. Ví dụ xét số 5125764 chia hết cho 7 vì:

4 + 2 x 6 + 2 x 7 - 5- 3 x 2 -2 x 1 + 5 = 28 chia hết cho 7.

Khi xét tính chia hết của một số tự nhiên ta cần chú ý đến tính chất quan trọng sau đây: Nếu một số A đồng thời chia hết cho hai số p và q thì cũng chia hết cho tích số *p* x *q* của hai số. Ví dụ số 5125764 đồng thời chia hết cho hai số 7 và 4 nên số này sẽ chia hết cho tích số 7 x 4 = 28 v.v...

Từ khoá: *Tính chia hết.*

7. Vì sao có thể tính nhanh bình phương của một số hai chữ số có chữ số cuối là 5?

Bạn có thể không cần dùng bút tính nhanh bình phương của một số hai chữ số có chữ số cuối là 5, ví dụ 35 được không?

Chúng ta có thể dùng các kiến thức đại số để tiến hành tính nhanh bình phương của các số loại này. Để tính bình phương một số hai chữ có chữ số cuối là 5 (chữ số hàng đơn vị là 5), ta lấy chữ số hàng chục nhân với chữ số hàng chục cộng 1, viết tiếp theo tích số thu được số 25, ta sẽ có bình phương cần tính. Ví dụ tính bình phương của số 35. Ta tính tích số (3 + 1) x 3 = 12. Viết số 12 bên trái số 25 ta có số cần tìm là 1225.



Ta thử xét quy tắc tính này có đúng không?

Ta viết con số cần tính dưới dạng $A = 10a + 5$, a là con số hàng chục. Theo công thức $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, ta có:

$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 2 \times 5 \times 10a + 25$

$= 100a^2 + 100a + 25$

$= 100a\,(a + 1) + 25$

$= a(a + 1) \times 100 + 25$.

Như vậy lấy a nhân với $a + 1$ rồi đặt tích số thu được bên trái số 25 là thu được số bình phương cần tính, đó chính là quy tắc vừa đề ra ở trên.

Từ khoá: *Về cách tính nhanh.*

8. Vì sao có thể tính nhanh một số dạng tích số?

Có người có khả năng tính nhẩm rất nhanh nhờ đó họ có thể cho được những đáp án đúng, nhanh các vấn đề, các đề án phức tạp. Để có thể có kĩ năng tính nhanh ngoài việc có nhạy cảm với các con số, có trí nhớ tốt, còn phải biết các quy tắc và trải qua rèn luyện, luyện tập. Sau đây là vài quy tắc tính nhanh một số dạng tích số.

Giả sử cần tính tích số của hai số có đặc điểm có chữ số hàng chục giống nhau và tổng các chữ số hàng đơn vị bằng 10.

Ví dụ cần tính tích số 74 x 76 = ?

Ta tính tích của chữ số hàng chục nhân với chữ số hàng chục + 1, tức là tích 7 x (7 + 1) = 7 x 8 = 56. Sau đó lập tích số của hai chữ số hàng đơn vị tức 6 x 4 = 24. Đặt hai tích số thu được kế tiếp nhau và thu được số 5624. Đó chính là tích số cần tính. Ta có thể dễ dàng chứng minh quy tắc vừa đưa ra.

Theo điều kiện đặt ra tích hai số cần tính có thể biểu diễn dưới dạng $(10a + b)(10a + c)$

$(10a + b)(10a + c) = 100a^2 + 10ab + 10ac + bc$

$= 100a^2 + 10ab + 10a(10 - b) + bc$

$= 100a^2 + 10ab + 100a - 10ab + bc$

$= 100a(a + 1) + bc$

Ta có thể mở rộng quy tắc này cho tích của các số có nhiều chữ số hơn. Ví dụ tính tích số 497 x 493 = ?

Dựa vào quy tắc đã nêu, trước hết ta tính

49 x 50 = 2450 và 7 x 3 = 21.

Và tích số cần tính sẽ là 245021.

Có rất nhiều loại quy tắc tính nhanh, để ứng dụng tốt các quy tắc cần có sự quan sát và cảm nhận nhanh, nhạy các con số. Nếu không thì dù đã biết rõ các quy tắc thì cũng không kịp nhận dạng và sử dụng quy tắc đúng chỗ và sẽ không đáp ứng được yêu cầu tính nhanh, thậm chí có khi sử dụng quy tắc tính nhanh lại không nhanh hơn cách tính toán thông thường nhiều lắm.

Lấy thêm ví dụ khác: Ta cần tính tích số 72548 x 37 = ?

Nếu bạn chú ý một chút sẽ thấy 3 lần số 37 là số 111, vì vậy khi nhân một số với số 37 có thể lấy số đó nhân với 111 sau đó lấy tích số vừa tính chia 3, kết quả sẽ cho ta tích số cần tính. Việc nhân một số với 111 khá đơn giản.

Thực hiện phép nhân với 111

```
  72548
   72548
+   72548
---------
 3|8052828
  ---------
  2684276
```

và 72548 x 37 = 2684276.

Rõ ràng ở đây trí nhớ có vai trò hết sức quan trọng. Muốn có trí nhớ tốt phải trải qua luyện tập. Có những người có kĩ năng tính nhanh kì tài, họ có thể nhớ chính xác đầy đủ bình phương của 1000 số nguyên đầu tiên.

Mọi bài toán đều có thể tính nhanh, việc tính toán có thể theo các quy tắc khác nhau, tốc độ tính toán phụ thuộc nhiều vào việc sử dụng hợp lí các quy tắc và phải thông qua quá trình rèn luyện mới thu được kết quả tốt.

Từ khoá: *Tính nhanh.*

9. Cách tính nhanh các tích số của các con số gần với 10..., 100..., 1000...

Có nhiều loại quy tắc tính nhanh, riêng với phép tính nhân có thể kể ra hơn 20 loại. Dưới đây là ba loại quy tắc có nhiều ứng dụng trong thực tế tính toán. Ta chia thành ba trường hợp.

1. Trường hợp hai số nhân hơi lớn hơn 10, 100, 1000. Ta có thể dùng phương pháp đơn giản sau đây:

a) Trước hết bỏ số 1 ở một thừa số, sau đó cộng với thừa số kia;

b) Thêm vào tổng số thu được các chữ số 0 (nếu các thừa số lớn hơn 100 thì thêm vào hai số; nếu hai thừa số lớn hơn 1000 thêm vào ba số 0 v.v...);

c) Sau đó lập tích số là tích hai chữ số hàng đơn vị;

d) Tính tổng số của các kết quả thu được từ bước b và bước c;

Ví dụ tính tích số 108 x 103 = ?

a, \108
+ 103
―――――
b, 11100
c, + 24... (3 × 8)
d, ―――――
11124

Vậy 108 x 103 = 11124

Ta có thể giải thích quy tắc tính toán như sau đây:

Hai số đã cho có thể viết dưới dạng

$10^a + h$ và $10^a + k$, *a, h, k* là các số nguyên.

Tích số sẽ là:

$(10^a + h)(10^a + k) = 10^a(10a + h + k) + hk$

Mà $10^a + h + k = (10^a + h) + (10^a + k) - 10a$

Tích số thu được sẽ có dạng:

$(10^a + h)(10^a + k) = 10^a[(10^a + h) + (10^a + k) - 10^a] + hk$

Và vì vậy ta đã thực hiện phép nhân hai số như đã trình bày ở trên.

2. Tích số có hai thừa số: một thừa số lớn hơn 10..., 100...,1000... còn một thừa số nhỏ hơn 10...,100...,1000... Việc tính tích số được thực hiện theo các bước sau đây:

a) Bỏ chữ số 1 ở thừa số lớn hơn 10...,100...,1000...rồi đem kết quả cộng vào thừa số kia.

b) Thêm vào kết quả thu được các chữ số 0...(với các thừa số lớn hơn, nhỏ hơn 100 thêm 2 chữ số 0, với thừa số lớn hơn, nhỏ hơn 1000 thêm ba chữ số 0...v.v...).

c) Lập tích số là hai chữ số hàng đơn vị của số lớn và bù 10 của số bé.

d) Trừ kết quả các bước *c* vào kết quả của bước *b*, ta sẽ thu được tích số cần tính.

Ví dụ: Tính tích số 1006 x 995 = ?

a, $\quad$ 1006
$\quad$ + 995

b, $\quad$ 1001000

c, $\quad$ - $\quad$ 30 ... (6×5)

chữ số bù tròn của số bé là 5.

d, Vậy 1006 x 995 = 10000970

Tổng quát hơn ta có:

$(10^a + h)(10^a - k) = 10^a (10^a + h - k) - hk$

Mà $10^a + h - k = (10^a + h)(10^a + k) - 10^a$

Nên

$(10^a + h)(10^a - k) = 10^a[(10^a + h) + (10^a - k) - 10^a] - h__k$

3. Cả hai thừa số của tích số đều nhỏ hơn 100, 1000, 10000 v.v...

Cách tính thực hiện theo các bước:

a, Lấy hai thừa số cộng với nhau, bỏ số 1 ở phía bên trái của tổng số vừa thu được.

b, Thêm các chữ số 0 vào kết quả vừa thu được, nếu các thừa số nhỏ hơn 100 thêm một số 0, thêm vào hai chữ số 0 nếu các thừa số nhỏ hơn 1000, thêm vào ba chữ số 0 nếu các thừa số nhỏ hơn 10000 v.v...

c, Lập tích là các số bù tròn của hai số.

d, Lập tổng số là kết quả của bước b và bước c, đó chính là tích số cần tìm.

Ví dụ: Tính tích số 998 x 987 = ?

a, $\quad$ 998
$\quad$ + 997

b, $\quad$ 1985000

c, + $\quad$ 26... (2×13), 2 bù tròn cho 998; 13 bù tròn cho 987 để thành 1000

d, 985026

Tổng quát hơn ta có:

$(10^a - h)(10^a - k) = 10^a(10^a - h - k) + h__k$ mà $10^a - h - k = (10^a - h) + (10^a - k) - 10^a$.

và

$(10^a - h) \times (10^a - k) = 10^a[(10^a + h) + (10^a - k) - 10^a] + h__k$

Từ khoá: *Tính toán nhanh.*

10. Thế nào là hiện tượng tuần hoàn trong các dãy số?

Hiện tượng tuần hoàn khá phổ biến trong một loạt các dãy số, nếu ta chú ý một chút có thể phát hiện được các chu kì tuần hoàn trong các dãy số.

Ví dụ với các luỹ thừa của các số tự nhiên với số mũ lớn hơn 5, người ta thấy có sự lặp đi lặp lại chữ số cuối. Luỹ thừa bậc 5 của 2 là 32, chữ số cuối cùng là 2, luỹ thừa bậc 5 của 3 là 243, chữ số cuối là 3; luỹ thừa bậc 5 của 7, không cần tính ta có thể dự đoán chữ số cuối là 7...

Quan sát các chữ số cuối của các bình phương các số từ 1 đến 9 ta thấy xuất hiện dãy số 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1. Bình phương của 10 là 100, chữ số cuối là 0. Các bình phương của các số tiếp theo cũng có các chữ số cuối lập thành dãy số 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1. Tất cả các bình phương của các số tự nhiên có các chữ số cuối lặp đi lặp lại trong vòng tuần hoàn này, hiện tượng lặp đi lặp lại vô số lần. Vòng lặp đi lặp lại này có số 0 làm ranh giới.

Người ta còn phát hiện "số gốc" của các bình phương chỉ có thể là 1, 4, 7, 9 mà không thể là các chữ số khác. Người ta gọi "số gốc" của một số là chỉ con số thu được khi cộng dần các chữ số có trong con số, khi tổng số gặp số 9 thì bỏ đi và tính tổng tiếp nếu gặp số 9 lại bỏ đi đến khi còn lại số cuối cùng nhỏ hơn 9 thì giữ lại, chữ số còn lại là "số gốc" của con số đã xét. Như vậy "số gốc" chính là kết quả phép tính cộng dồn các chữ số có trong một con số, lấy số 9 làm điểm dừng. Ví dụ "số gốc" của 135 là 9, số gốc của số 246 là 3...

Ứng dụng tính chất vừa nêu ta có thể phán đoán một số có phải là một số chính phương (bình phương của một số nào đó) hay không. Ví dụ xét xem số 98765432123456789 có phải là một chính phương hay không? Ta tìm số gốc của con số vừa đưa ra và thấy số đó có số gốc là 8 mà không phải là một trong các chữ số 1, 4, 7, 9. Vậy con số vừa nêu không phải là số chính phương.

Số gốc của một chính phương không chỉ có đặc tính vừa nêu mà còn thành lập dãy số tuần hoàn 1, 4, 9, 7, 7, 9, 4, 1. Ở đây chữ số ranh giới là 9 chứ không phải số 0 như ở các chu kì khác. Dưới đây là một dãy làm ví dụ:

100 (bình phương của số 10) có số gốc là 1.

121 (bình phương của số 11) có số gốc là 4.

144 (bình phương của số 12) có số gốc là 9.

169 (bình phương của số 13) có số gốc là 7.

196 (bình phương của số 14) có số gốc là 7.

225 (bình phương của số 15) có số gốc là 9.

256 (bình phương của số 16) có số gốc là 4.

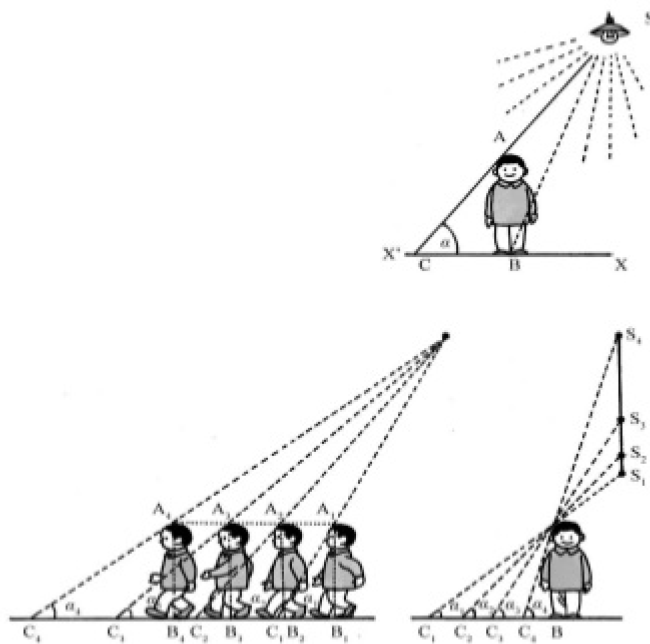
324 (bình phương của số 18) có số gốc là 9 (ranh giới của chu kì).

361 (bình phương của số 19) có số gốc là 1 (chu kì lặp lại).

Tính chất này của các bình phương không chỉ rất thú vị mà có giá trị thực tiễn lớn. Vận dụng linh hoạt tính chất này có thể nắm chắc được các mẹo nhỏ trong tính toán nhanh.

Từ khoá: *Tính tuần hoàn trong các bình phương*.

Vào buổi tối khi bạn lùi xa ngọn đèn, nếu chú ý, bạn sẽ quan sát một hiện tượng lí thú là độ dài bóng của chính bạn có thay đổi. Khi đứng dưới ánh Mặt Trời, bạn cũng có thể nhận thấy là bóng của bạn tuỳ từng thời gian mà có lúc dài, có lúc ngắn. Bạn có biết tại sao không?



Khi người đang đi, thân người ở trạng thái đứng thẳng. Bạn có thể dùng một đoạn thẳng đứng AB biểu diễn thân người, đường ngang X'X biểu diễn mặt đất, S là vị trí nguồn sáng. Ta vẽ từ S các tia sáng chiếu xuống mặt đất.

Phần lớn các tia sáng đều đến được mặt đất, chỉ có các tia nằm trong miền tam giác *ACB* là bị thân người chắn mất và trên mặt đất sẽ có bóng người là *BC*.

AC là tia sáng đầu tiên bị chắn lại, nên có thể xem đó là biên giới của chùm tia bị chắn. Góc của tia giới hạn với mặt đất sẽ tạo nên góc α, được gọi là góc chiếu. Chiều cao *AB* của người không hề thay đổi, thế nhưng khi người chuyển động hoặc khi nguồn sáng di động, độ dài của bóng *BC* sẽ thay đổi. Các bóng người ở bên trái trang sách từ vị trí *A*] [sub]_B_[đến vị trí A_2B_2 sang A_3B_3 rồi đến vị trí A_4B_4. Còn ở trang trên biểu thị khi nguồn sáng di động từ vị trí S1 đến vị trí S_2, S_3 rồi đến S_4. Dựa vào hai hình vẽ ta thấy khi AB di động về phía bên trái thì bóng BC càng ngày càng dài, còn khi nguồn sáng S di chuyển từ dưới lên trên thì bóng sẽ ngày càng ngắn. Cho dù *AB* di động hay nguồn sáng S di động đều có điểm chung là góc chiếu α càng lớn thì ảnh *BC* càng ngắn, góc chiếu α càng bé thì bóng càng dài. Tuy nhiên có điều cần chú ý là góc α và độ dài của *BC* không có mối quan hệ tỉ lệ, ví dụ α nhỏ đi $^1/_2$ thì *BC* không phải tăng gấp đôi.

Ta biết rằng trong tam giác vuông ta có hệ thức:

$$AB = BC \tan\alpha$$

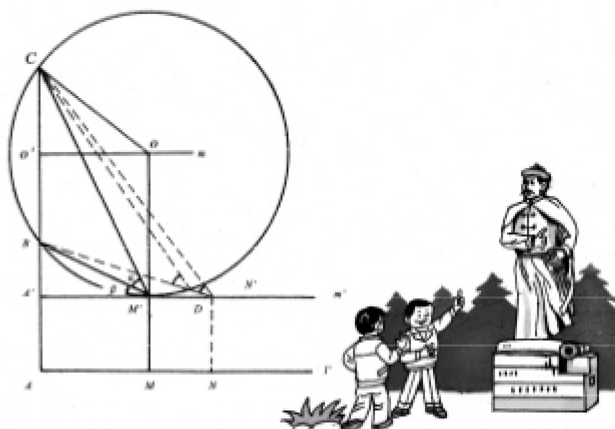
Đây là hệ thức tương quan hết sức có ích. Khi đo độ dài của bóng của toà lâu đài, đo góc chiếu người ta có thể tính được chiều cao của toà lâu đài.

Ở tại một công viên nọ có một bức tượng cao 3,5 m, pho tượng lại đặt trên bệ cao 2,46 m. Bạn có biết đứng tại vị trí nào thì góc nhìn pho tượng là lớn nhất?

Chúng ta có thể giải đáp câu hỏi này bằng phương pháp hình học. Bạn hãy vẽ trên mặt giấy một đường nằm ngang 1 biểu diễn mặt đất, ta vẽ trên 1 một đoạn thẳng đứng gốc *A*. Trên đường thẳng đứng ta chọn ba điểm *A', B, C* theo một tỉ lệ chọn trước *AA'* có độ dài bằng khoảng cách của mắt người đến mặt đất (giả sử chiều cao này là 1,5 m), *AB* có độ dài bằng chiều cao của bệ là 2,46 m, *BC* có độ dài bằng chiều cao của pho tượng là 3,5m. Chọn *O'* là điểm giữa đoạn *BC*, vẽ đường vuông góc với *BC* qua *O'* là *O'm*. Qua *A'* vẽ *A'm'* song song với đường nằm ngang. Lấy *B* hoặc *C* làm tâm vẽ vòng tròn bán kính *O'A'*, vòng tròn sẽ cắt đường thẳng *m* ở điểm *O* bên phải điểm *O'*. Lại lấy *O* làm tâm, vẽ vòng tròn bán kính *O'A'*, vòng tròn sẽ cắt đường thẳng *m* ở điểm *O* bên phải điểm *O'*. Lại lấy O làm tâm, vẽ vòng tròn bán kính *O'A'*, đường tròn này phải đi qua hai điểm *B* và C và tiếp xúc với đường *m'* tại *M'*. Qua *M'* vẽ đường thẳng vuông góc với *C*, chân của đường vuông góc này là *M*. *M* chính là điểm mà tại đó người ta sẽ nhìn pho tượng với góc nhìn lớn nhất.

Tại sao vậy? Giả sử có một người quan sát đứng ở bên phải điểm *A*, ví dụ tại điểm *N*. Qua *N* ta vẽ đường vuông góc cắt *m'* tại điểm *N'*. Góc *BN'C* là góc nhìn của người quan sát đứng tại *N* quan sát bức tượng. Vẽ *BN', BN'* sẽ cắt vòng tròn tại điểm *D*, nối *CD*, góc *BDC* là góc ngoài của tam giác *CDN'* rõ ràng là lớn hơn góc trong không liền kề là *BN'C*. Mặt khác góc *BM'C* (của người quan sát đứng tại *M*) là góc cùng chắn cung *BC* với góc *BDC*, nên BM'C= BDC, vì vậy BM'C > BN'C nên *M* là điểm mà người quan sát có góc nhìn pho tượng là lớn nhất.

Từ hình vẽ ta cũng có thể tính được độ dài của *AM* là 2,1m và là 40^0.



Thế liệu có thể tìm công thức tính toán chính xác được không? Giả sử bức tượng có chiều cao $BC = h$, bệ tượng có chiều cao $AB = p$. Người quan sát có tia nhìn từ độ cao $MM' = e$. Khi $e < p$ thì góc nhìn lớn nhất của người quan sát với pho tượng đứng tại điểm M thì khoảng cách M từ M đến chân pho tượng A sẽ là:

$$AM = \sqrt{\left(p - e + \frac{h}{2}\right)^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}$$

Theo công thức này ta tính được AM ≈ 2,07 m.

Từ khoá: *Góc nhìn.*

Nếu có người yêu cầu bạn đo chiều cao của một đồ vật không cao lắm như đo chiều cao của bàn học, hoặc đo chiều cao của bảng đen trong lớp học, bạn lập tức lấy thước đo ngay. Thế nhưng nếu cần đo chiều cao của một cái cây cao thì vấn đề quả không dễ và phải tốn nhiều công sức, suy nghĩ.

Như ở hình 1, có người định dùng ảnh cây để đo chiều cao *AB* của cây. Ông ta dùng một gậy tre *CD* dài 1 m, dựng thẳng đứng trên mặt đất và đo độ dài bóng của cây gậy tre và tìm thấy 0,8 m. Ông ta lại đo chiều dài của bóng cây *AE* và tìm thấy độ dài của bóng cây là 2,4 m. Qua một phép tính đơn giản ông đi đến kết luận là cây cao 3 m.

Vì hai tam giác ABE và CDE đồng dạng với nhau, ta có:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{CD}{CE}; \frac{AB}{2,4} = \frac{1}{0,8}; AB = 2,4 \times \frac{1}{0,8} = 3 \text{ m}\cdot$$

Sau đó, ông ta lại muốn đo chiều cao của một cái cây khác ở gần một tường bao. Bấy giờ, bóng cây sẽ không hoàn toàn nằm trên mặt đất mà có một phần chiếu lên trên bức tường như ở hình 2. Ông đo được phần bóng cây nằm trên mặt đất dài 2,8 m, phần nằm trên bức tường dài 1,2 m.

Vì bây giờ có một phần bóng cây ở trên tường, nên ông ta không thể dùng phương pháp cũ để đo chiều cao của cây, nhưng nếu xem xét kĩ bóng cây được hình thành như thế nào thì vấn đề được giải quyết.

Như ở hình 3 đoạn AB biểu diễn độ cao của cây, *AC* là phần bóng cây nằm trên mặt đất và *CD* là phần bóng cây rơi lên bức tường, *BD* là tia sáng Mặt trời. Qua C ta vẽ CE // BD, đường song song này cắt BD tại E.

Vậy chiều cao của cây là: *AB* = *AE* + *EB*.

Theo như trên kia ta có:

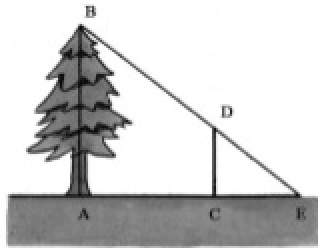
$^{AE}/_{AC} = {}^{1}/_{0,8}$; $^{AE}/_{2,8} = {}^{1}/_{0,8}$

AE = 2,8 x $^{1}/_{0,8}$ = 3,5 m

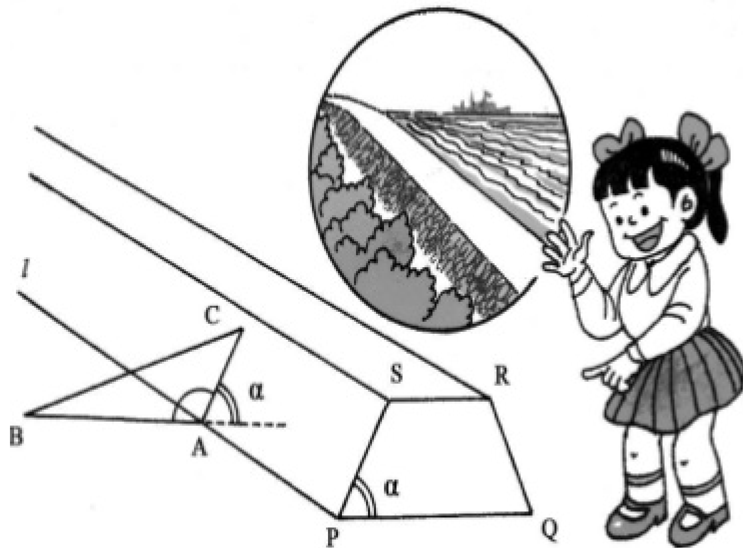
Đồng thời *EB* = *CD* = 1,2m. Vì vậy chiều cao của cây sẽ là AB = 3,5 + 1,2 = 4,7 m.

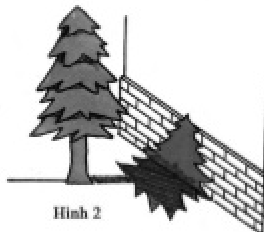
44. Làm thế nào để đo được góc chân đê?

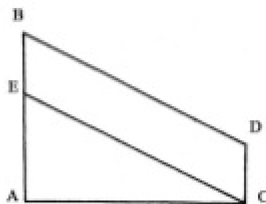
Người ta thường nói "nước lửa vô tình". Để ngăn ngừa nạn lụt cho đồng ruộng, thôn quê, thành thị nhiều nơi người ta phải đắp các con đê để chống lụt. Mặt cắt thân đê nói chung là hình thang cân. Như biểu diễn trên hình vẽ *PQRS* là mặt cắt có dạng hình thang cân, α là góc ở chân đê.



Hình 1




Hình 2



Hình 3

Khi đê đắp xong làm thế nào ta có thể đo được góc chân đê? Có người cho rằng điều đó quá dễ, chỉ cần đào một hố sâu ở chân đê, đo *PQ, SR* và *PS* rồi dựa vào hệ thức $\cos\alpha = \frac{1}{2} \times \frac{PQ - RS}{PS}$, ta sẽ tính được góc α. Thế nhưng nếu đào hố sâu ở thân đê thì dễ làm hư hại đê và có thể gây sự cố. Vậy phải làm cách nào mà không cần đào hố ở thân đê mà vẫn đo được góc chân đê α.

Theo như hình vẽ, giả sử mặt đê và mặt đất cắt nhau theo giao tuyến *l, A* là điểm tuỳ ý trên *l*. Qua *A* ta vẽ AB vuông góc với *l* (AB ⊥ *l*). Trên mặt đê ta vẽ AC ⊥ l. Bấy giờ α = 1800 - BAC. Chỉ cần đo được góc BAC, ta có thể biết được góc α.

Để đo góc BAC, qua hai điểm *C, B* ta căng một dây, sẽ hình thành tam giác *ABC*, là góc trong của tam giác *ABC*. Dùng thước dây đo được độ dài các đoạn *BC, AC, AB,* từ đó tính được BAC. Giả sử đo được *BC = a, AC = b, AB = c,* theo hệ thức lượng trong tam giác ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \widehat{BAC}$$ và

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

từ đó ta nhanh chóng tính được góc BAC.

Vì vậy dùng phương pháp đã trình bày trên đây ta có thể đo được góc ở chân đê.

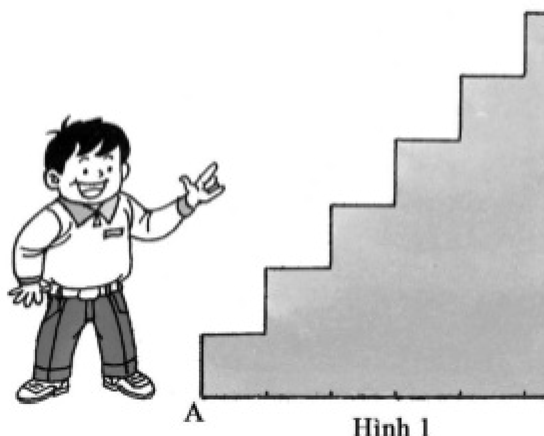
Từ khoá: *Hình tam giác, hình thang cân.*

Một trường học đã xây dựng xong một thư viện đẹp đẽ nếu trên các cầu thang lại trải thảm thì

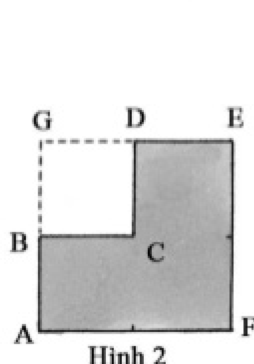
sẽ tăng phần thanh khiết, sang trọng. Thế nhưng bạn có biết cách tính nhanh được lượng thảm cần trải đủ các cầu thang?

Bạn sẽ trả lời, vấn đề quá dễ: chỉ cần đo chiều rộng chiều cao của mỗi bậc thang sau đó trừ hao một ít là được ngay. Bạn thử nghĩ xem cách giải quyết như vậy có gây lãng phí không?

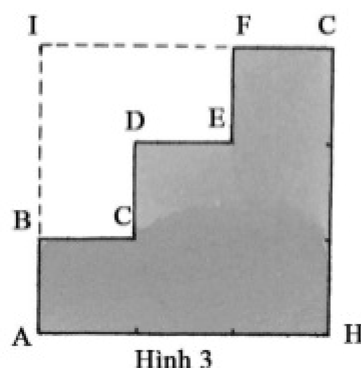
Trên hình 1 biểu diễn mấy bậc thang tạo nên cầu thang. Trong đó *AB, BC* là tổng bề rộng và chiều cao. Chỉ cần đo được *AB* và *BC* sau đó trừ hao độ dài, giá trị thu được sẽ là độ dài của thảm cần mua.



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Giả sử rằng cầu thang chỉ có hai bậc thang như trình bày ở hình 2, khi đó độ dài của tấm thảm cần thiết sẽ là *ABCDE*. Nếu kéo dài *AB* và *DE* chúng sẽ cắt nhau tại *G*, ta có: *BC = GD, CD = BG* nên độ dài của đường gãy khúc *ABCDE* chính bằng tổng của *AG + GE*, cũng chính là tổng của *AF + FE*.

Nếu xét cầu thang có ba bậc như biểu diễn ở hình 3, ta kéo dài *AB* và *GF* và *I* là giao điểm của các đường kéo dài. Bạn dễ dàng nhận thấy, độ dài của tấm thảm chính là tổng của *AH + HG*. Bằng cách làm tương tự thì cho dù cầu thang có bao nhiêu bậc ta cũng có thể nhanh chóng tính được ngay độ dài tấm thảm cần mua.

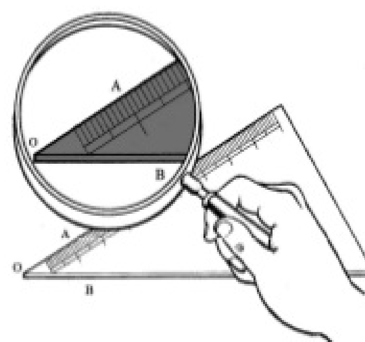
Chúng ta thường thấy các cụ già khi đọc sách, đọc báo thường đeo kính lão hoặc cầm kính lúp (kính phóng đại) để đọc sách báo. Vì kính lão hoặc kính phóng đại đều có thể làm cho chữ viết hoặc hình vẽ được phóng to lên nhiều lần giúp các cụ già đọc, nhìn dễ hơn.

Kính lúp, kính lão có thể phóng to hình vẽ, chữ viết, đồ vật lên nhiều lần, thậm chí đến hàng chục lần. Còn muốn phóng to lên gấp hàng trăm, hàng vạn thậm chí đến hàng triệu lần người ta phải dùng kính hiển vi quang học hoặc kính hiển vi điện tử. Thế nhưng có một thứ mà không có bất kì loại kính phóng đại nào có thể phóng to lên được: đó chính là các "góc" trong hình học. Góc có ý nghĩa rất lớn trong thực tiễn. Trong đo đạc, trong thiết kế máy móc người ta đều cần đến góc. Góc là do hai tia thẳng xuất phát từ một điểm tạo thành. Như hình vẽ ở bên phải góc AOB là do hai tia thẳng xuất phát từ điển *O* là *OA* và *OB* tạo ra. Góc to và nhỏ đều do mức độ mở của hai tia mà có. Chúng ta đều biết độ to nhỏ của một góc được biểu diễn bằng độ phút và giây.

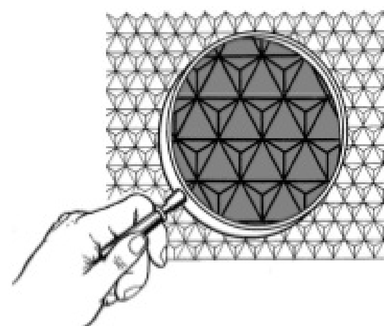
Ví dụ như ở hình bên phải, ở phía trên là góc 30^0. Dưới kính phóng đại độ lớn của góc vẫn là 30^0. Chỉ có điều là kính phóng đại làm cho các chi tiết trên hình vẽ sẽ to hơn, các đường nét vẽ sẽ thô hơn, chữ viết, chữ số to hơn còn góc mở của các chi tiết vẫn không thay đổi.

Vì sao vậy ?

Một là vì qua kính phóng đại, vị trí của hai tia tạo nên góc vẫn giữ nguyên không hề thay đổi: Đường *OB* vẫn giữ vị trí là đường nằm ngang, còn *OA* vẫn giữ nguyên độ nghiêng trên OB sau khi phóng đại. Vì vậy độ mở của góc không hề thay đổi. Nên kính phóng đại chỉ có thể phóng đại được kích thước các đồ vật so với trước khi phóng đại, còn hình dáng đồ vật vẫn không thay đổi.



Trong toán học người ta gọi hiện tượng "hình tượng đồ vật không thay đổi sau khi phóng đại là hiện tượng đồng dạng". Với hình đồng dạng, các góc đối xứng của hình không thay đổi. Vì vậy góc nhìn $\widehat{ADB}$ dưới kính phóng đại so với góc thực $\widehat{AOB}$ vẽ trên giấy không hề thay đổi về độ lớn.

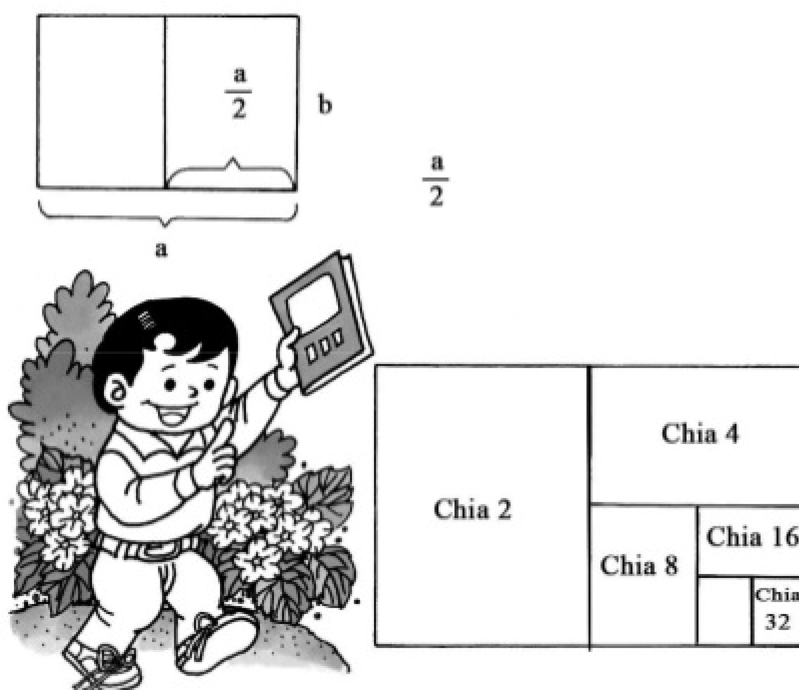


Một ví dụ rõ nhất là bốn góc của bàn học, bốn góc của một quyển sách cho dù có phóng đại lên bao nhiêu lần thì các góc vẫn là các góc vuông. Như vậy cho dù kính phóng đại có độ phóng đại lớn đến bao nhiêu lần thì các góc cũng không hề thay đổi. Hình vẽ thì được phóng đại nhưng góc không hề thay đổi dưới kính phóng đại.

Từ khoá: *Góc.*

Nói chung với một quyển sách thì bề dài và bề rộng có tỉ lệ bằng bao nhiêu? Chắc chắn không ít người vẫn hay nghĩ đến "con số tỉ lệ vàng" 1,618. Sự thực không phải như vậy.

Kích thước một quyển sách nói chung do kích thước của trang giấy nguyên (cỡ giấy theo tiêu chuẩn sản xuất giấy: A_O, A_1...) cắt ra mà có.



Ví dụ khổ giấy cỡ 32 là do gấp tờ giấy nguyên thành đôi rồi lại tiếp tục gấp đôi, gấp đôi theo các chiều đến khi đạt được cỡ đã chọn. Bằng cách đó người ta sẽ thu được các quyển sách có các trang giấy đồng dạng và giữ nguyên tỉ lệ về độ rộng, độ dài của trang sách dù các trang sách có to nhỏ khác nhau. Giả sử trang giấy là hình chữ nhật có chiều dài là *a*, chiều rộng là *b*, sau khi cắt đôi theo chiều ngang, ta có hình chữ nhật với chiều dài *b* và chiều rộng . Căn cứ theo yêu cầu người ta tiếp tục cắt ngang và thu được trang giấy với kích thước đã chọn đồng dạng với trang giấy ban đầu nhưng có kích thước theo tỉ lệ chọn trước.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{\frac{a}{2}}$$

và do vậy $a^2 = 2b^2$ và $^a/_b = \sqrt{2}$

Từ đó có thể thấy tỉ lệ của bề dài và bề rộng của trang sách là √2, nhờ đó mà sau khi cắt nhỏ từ trang lớn, các trang nhỏ sẽ đồng dạng với trang ban đầu.

Từ khoá: *Hiện tượng đồng dạng.*

Khi bạn ngồi lên ghế đẩu hoặc ghế tựa, nếu gặp phải chiếc ghế bị xộc xệch, tự nhiên là bạn sẽ tìm ít thanh gỗ để gia cố lại, thế nhưng ta cần đóng đinh như thế nào thì tốt nhất?

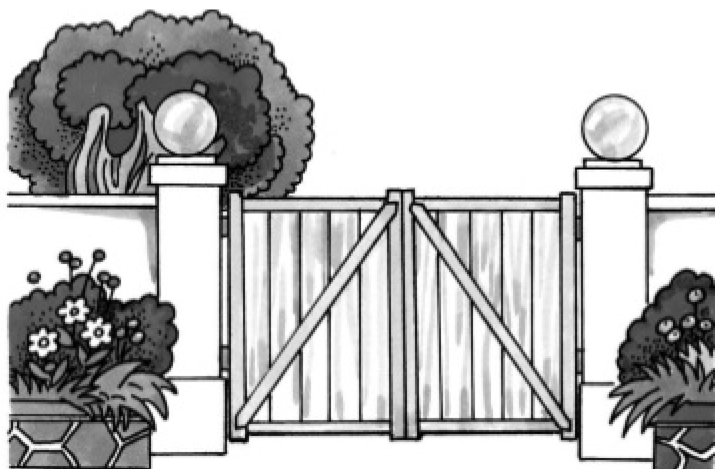
Nếu bạn đem các mảnh gỗ đóng dọc theo đầu các chân ghế bị long, thì chỉ qua ít ngày sử dụng, ghế sẽ lại bị xộc xệch, long ra.

Nhưng nếu bạn chọn các điểm ở chỗ tiếp giáp của mặt ghế và chân ghế tạo thành một hình



tam giác, đặt đầu thanh gỗ gia cố vào các điểm đó rồi đóng ba chiếc đinh để ba chiếc đinh phân bố thành hình tam giác, sau khi sửa chữa như vậy chiếc ghế sẽ trở nên chắc chắn như cũ.

Vì sao với cùng các thanh gỗ gia cố mỏng như nhau mà việc đặt thanh gỗ song song và tạo góc xiên với chân ghế lại có hiệu quả khác nhau như vậy? Tại sao chỉ dùng ba chiếc đinh đóng phân bố theo hình tam giác lại đủ bền chắc.



Đó là do hình tam giác có tính chất đặc thù: chỉ cần ba cạnh tam giác có độ dài xác định thì hình thái của tam giác, độ lớn nhỏ sẽ không thay đổi. Người ta gọi tính chất này là đỉnh ổn định của hình tam giác. Vì vậy mà ở các cánh cửa người ta thường đóng một thanh gỗ xiên, ở các dầm cầu người ta cũng dùng các thanh đỡ có kết cấu tam giác.

Khi đi dã ngoại chắc bạn đã nhìn thấy người ta buộc ba cây cọc thành một chùm rồi xoè ra thành một giá đỡ rất chắc chắn. Ngoài việc sử dụng tính ổn định của hình tam giác người ta còn chú ý đến tính chất là: với ba điểm không thẳng hàng là có thể xác định một mặt phẳng, khiến cho ba điểm mút của giá ba chân làm thành một chân đế vững chắc.

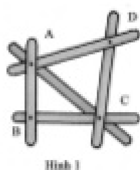
Từ khoá: *Hình tam giác.*

Nếu bạn dùng đinh để đóng ghép ba thanh gỗ thành hình tam giác, thì hình dáng của khung gỗ này sẽ không thay đổi. Đó là nguyên lí "tính ổn định của hình tam giác".

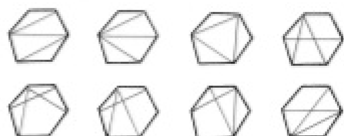
Thế nhưng nếu dùng đinh để đóng ghép bốn thanh gỗ thành một cái khung có bốn cạnh là *ABCD*, hình dáng của khung có bốn cạnh rất dễ bị biến dạng. Vậy hình bốn cạnh không có tính ổn định.

Nếu muốn khung bốn cạnh này không bị xộc xệch, ta lại sử dụng nguyên lí tính ổn định của tam giác, dùng một thanh gỗ đóng thanh gỗ đóng cố định các đỉnh đối nhau như ở các điểm A, C để chia thành hai hình tam giác là được. Chúng ta thường thấy khi người ta đóng các cánh cửa chấn song, thường có đóng thêm thanh chéo góc là vì lí do đó. Không chỉ các hình bốn cạnh không có tính ổn định mà ở các hình có số cạnh lớn hơn bốn cũng không có tính ổn định.

Nếu bạn muốn dùng các thanh gỗ để ghép thành một khung lồi *ABCDEF* như ở hình bên liệu bạn có thể dùng ba thanh gỗ để gia cố làm nó không xộc xệch được không?







Theo nguyên lí "tính ổn định của hình tam giác" thì vấn đề nêu trên không khó giải quyết lắm. Trên hình vẽ đã nêu lên các cách gia cố để khung gỗ được cố định.

Trên thực tế có thể có nhiều cách gia cố khác, bạn thử nghĩ xem các giải pháp khác.

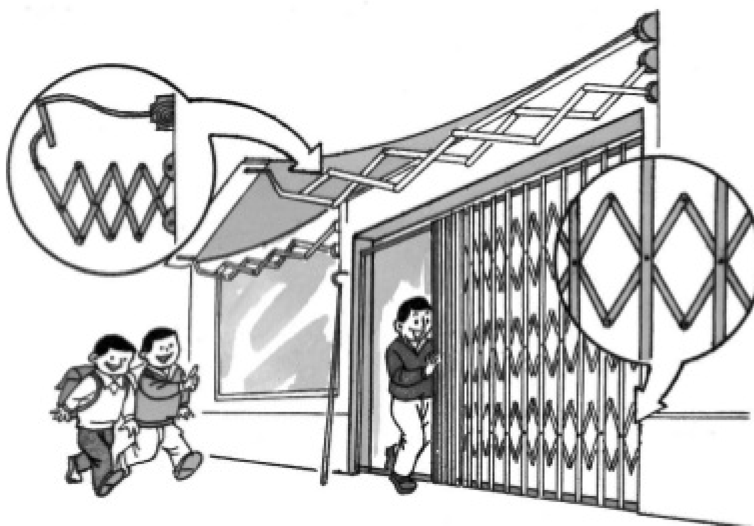
Từ khoá: *Hình tam giác; Hình nhiều cạnh.*

Các bạn sống ở thị trấn, thành phố, trên đường đi học, về nhà qua các phố; chắc bạn thấy có cửa hiệu, nhà ở có các tấm cửa xếp bằng thép nặng nề. Nhưng nếu lưu ý bạn sẽ thấy cho dù là các tấm cửa xếp có cấu trúc nặng nề như thế nào nhưng nếu chỉ cần kéo, đẩy nhẹ là có thể đóng mở dễ dàng? Vì sao như vậy? Liệu tấm cửa xếp dễ đóng mở như vậy có bị xộc xệch không bền hay không?

Nếu chú ý nghiên cứu một chút bạn sẽ thấy cấu tạo của cửa kéo. Nguyên do là các thanh của khung cửa ghép theo dạng hình thoi hoặc các hình bình hành.

Thế nhưng tại sao bốn đầu ghép nối bằng chốt của khung hình thoi hoặc hình bình thành lại có thể kéo mở tự do? Nếu dùng các khung có dạng hình khác có được không?

Ta có thể trả lời ngay: không được, vì như thế sẽ không đóng mở được cửa xếp.



Nguyên do là khác với hình tam giác, hình có bốn cạnh có độ dài xác định không có hình dáng cố định. Với một khung hình bốn cạnh, người ta có thể dễ dàng bóp méo, người ta nói hình bốn cạnh không có tính ổn định. Một khung gỗ hình vuông hay một hộp diêm rất dễ bị bóp bẹp cũng chính vì lí do đó.

Từ đó cho thấy nếu biết vận dụng hợp lí tính không ổn định của hình bốn cạnh vào mục đích sản xuất người ta đã

thu được hiệu quả tốt như với việc sản xuất các cửa xếp bằng thép.

Từ khoá: *Hình thoi; Hình bình hành*.

11. “Thế nào là sự nhảy vào “hố đen” của các con số?

Chúng ta hãy làm một cuộc du lịch thú vị vào thế giới những con số. Mời các bạn tuỳ ý viết một con số có ba chữ số (phải có các chữ số không hoàn toàn giống nhau) sau đó sắp xếp các chữ số trong con số từ lớn đến bé ta sẽ thu được một số mới. Sau đó lại sắp xếp các chữ số trong số vừa thu được theo thứ tự ngược lại từ bé đến lớn ta lại được một số khác. Tìm hiệu số của hai số vừa mới nhận được. Lặp lại các bước như vừa tiến hành với hiệu số vừa mới nhận được. Xét xem bạn sẽ nhận được kết quả như thế nào:

Ví dụ chọn số 323. Sau bước sắp xếp thứ nhất ra có các số 332, sau bước thứ hai sẽ là số 233. Hiệu số của hai số này sẽ là 099. (Số 099 cũng là số có 3 chữ số). Lại tiếp tục thao tác các bước tiếp theo và tiếp tục thu nhận được các số 990 - 099 = 891; 981 - 189 = 792; 792 - 279 = 693; 693 - 396 = 594; 954 - 459 = 495; 954 - 495 = 495... Sau một số bước biến đổi con số đưa ra ban đầu đã chui vào “túi” và dừng lại ở số 495.

Thế với các số 4 chữ số thì sẽ ra sao? Kết quả được khẳng định là với các số có 4 chữ số thì các bước biến đổi sẽ dừng lại ở số 6174. Điều này dường như các loại số đã nêu trên đã chui vào các “hố đen” trong toán học và không ra khỏi được nữa.

Nhà toán học Liên Xô cũ Kasimov trong sách “Cảm nhận toán học” đã từng viết “Đây là bí mật không có lời giải”.

Người ta cho rằng “hố đen” không chỉ có một số mà có thể có nhiều số xuất hiện như các hình trong đèn kéo quân hoặc giống như hình tượng Tôn Ngộ Không lạc vào bàn tay của Phật tổ Như Lai.

Ví như các số có năm chữ số người ta phát hiện hai “dãy” đó là: {63954, 61794, 62962, 75933} và {62964, 71973, 83952, 74943}. Nếu các bạn thấy có hứng thú thì hãy thử xem.

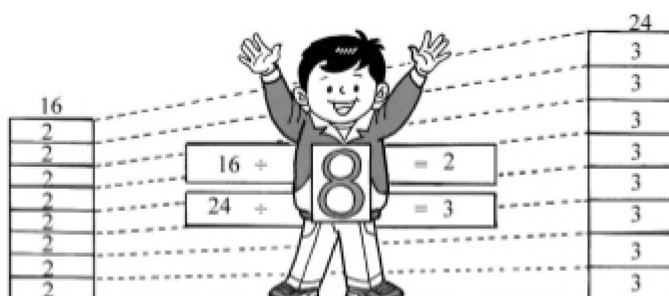
Từ khoá: *Số nhảy và hố đen.*

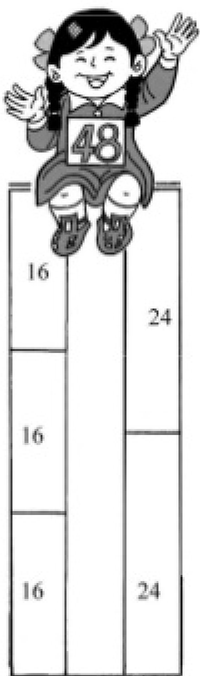
12. Vì sao người ta không nói đến ước số chung nhỏ nhất và bội số chung lớn nhất?

Khi học toán, chúng ta đã học ước số chung lớn nhất và bội số chung nhỏ nhất. Thế nhưng các bạn có đặt ra câu hỏi tại sao người ta hay nói đến ước số chung lớn nhất và bội số chung nhỏ nhất mà không nói đến ước số chung nhỏ nhất và bội số chung lớn nhất không? Liệu có phải không có ước số chung nhỏ nhất và bội số chung lớn nhất nên người ta không bàn đến vấn đề đó?

Trước hết chúng ta xem hai tình huống cụ thể sau đây:

Xét các số 16 và 24, chúng có các ước số 1, 2, 4, 8 ước số lớn chung nhất là 8 và nhỏ nhất là 1.





Còn với các số nguyên 15 và 56 chúng chỉ có một ước số là 1.

Ước số chung lớn nhất có vai trò quan trọng trong phép tính với các phân số. Nhờ có ước số chung lớn nhất mà người ta có thể thu gọn các phân số thành các phân số tối giản, còn ước số chung nhỏ nhất thì chả dùng để làm gì, vì vậy người ta ít khi bàn đến ước số chung nhỏ nhất.

Thế nhưng có phải hai số nguyên bất kì không có bội số chung lớn nhất? Ví dụ xét hai số 16 và 24, bội số chung nhỏ nhất của hai số này là 48. Tất cả các bội số của 48 đều là bội số chung của hai số 16 và 24,

ví như 48 x 2 = 96, 48 x 3 = 144, 48 x 4 = 192, 48 x 1000 = 48000 v.v.. đều là bội số chung của hai số 16 và 24. Vì vậy các số tự nhiên không có bội số chung lớn nhất.

Trong thực tế khi tính toán với các phân số, người ta chỉ cần đến bội số chung nhỏ nhất khi tiến hành quy đồng mẫu số. Khi đã không cần đến bội số chung lớn nhất thì cũng chẳng cần bàn đến bội số chung lớn nhất làm gì.

Từ khoá: *Ước số chung và bội số chung.*

13. Vì sao số 1 không phải là số nguyên tố?

Người ta chia các số tự nhiên làm ba nhóm số: nhóm số thứ nhất thuộc loại số nguyên tố; loại thứ hai là nhóm các hợp số; số 1 không phải là số nguyên tố cũng không thuộc loại hợp số. Số nguyên tố chỉ có thể chia hết cho số 1 và chính bản thân số đó, còn hợp số có thể chia hết cho các số khác. Ví dụ số 6 là một hợp số vì ngoài số 1 và bản thân số 6, số 6 còn có thể chia hết cho 2 và 3, vì vậy việc chia số nguyên tố và hợp số thành hai nhóm riêng biệt là hoàn toàn hợp lí. Số "1" chỉ chia hết cho 1 và bản thân nó (cũng là số 1), vậy tại sao lại không ghép nó vào nhóm số nguyên tố chẳng tiện lợi hơn hay sao, vì lúc bấy giờ các số tự nhiên chỉ cần chia thành hai nhóm số là đủ?

Để giải đáp câu hỏi này, ta cần bắt đầu bàn về số nguyên tố. Ví dụ ta cần xem xét số 3003 có thể chia hết cho những số nào? Muốn trả lời câu hỏi này ta cần phải xét tính chia của 3003 cho tất cả các số từ 1 cho đến 3003 và việc làm đó cũng tốn khá nhiều công sức.

Chúng ta biết rằng mọi số tự nhiên đều có thể biểu diễn thành tích số của nhiều số nguyên tố. Hiển nhiên là mọi số tự nhiên đều có thể phân tích thành một tích số của nhiều số nguyên tố và hơn thế nữa phải là cách duy nhất. Ta hãy lấy số 3003 làm ví dụ, ta có thể thấy: 3003 = 3 x 7 x 11 x 13.

Bây giờ ta xét vì sao không thể xem số 1 là số nguyên tố?

Nếu xem "1" là số nguyên tố thì khi phân tích một số phức hợp thành tích của nhiều số nguyên tố, lúc bấy giờ sẽ không

có một lời giải duy nhất nữa. Ví như với số 3003 ta có thể viết thành:

3003 = 3 x 7 x 11 x 13

3003 = 1 x 3 x 7 x 11 x 13

3003 = 1 x 1 x 3 x 7 x 11 x 13

nghĩa là ta có thể thêm tích số tuỳ ý số con số 1 và như vậy việc biểu diễn 3003 thành tích của các số nguyên tố đã không phải là duy nhất và trở thành có thể phân tích một số thành tích của các

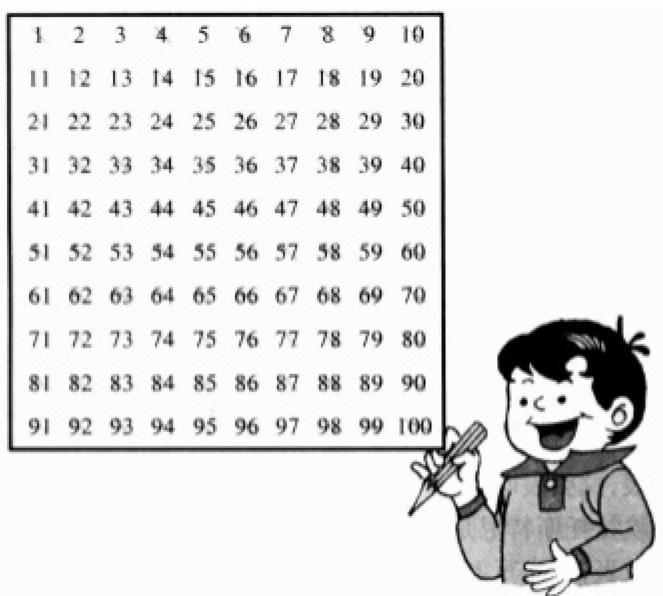
số nguyên tố theo nhiều cách và đó sẽ là một phiền phức lớn, vì vậy không thể xem 1 là một số nguyên tố.

Từ khoá: *Số nguyên tố và hợp số.*

14. Có phải số các số nguyên tố là hữu hạn?

Trong các số tự nhiên thì 2, 3, 5, 7...chỉ có thể chia hết cho số 1 và bản thân số đó, đó là các số nguyên tố. Các số 4, 6, 8, 9... thì ngoài số 1, các số này còn có thể chia hết cho nhiều số khác, các số này thuộc loại các hợp số. Số 1 không phải là số nguyên tố cũng không phải thuộc loại hợp số.

Thế trong các số tự nhiên, những số nào là số nguyên tố? Hơn 300 năm trước Công nguyên, một học giả cổ Hy lạp Erathos Thenes đã đưa ra một phương pháp.



Ông viết dãy các số tự nhiên lên một trang giấy rồi dán lên một cái khung, sau đó lần lượt khoét hết các hợp số trong đó và thu được một vật giống như cái rây, các lỗ rây chính là chỗ các hợp số đã bỏ đi. Người ta gọi trang giấy này là chiếc “sàng Eratosthenes” nổi tiếng.

Bằng cách này, Eratosthenes đã thu được các số nguyên tố trong dãy số 50 số nguyên đầu tiên. Ông viết các số từ 1 đến 50, trước hết đục bỏ số 1, giữ lại số 2. Sau đó đục bỏ các số là bội số của 2, để lại số 3. Sau đó đục bỏ số là bội số của 3, để lại số 5. Sau đó loại bỏ các bội số của 5...Nhờ cách này người ta thu nhận được các số nguyên tố trong 50 số nguyên đầu tiên. Đây chính là “phương pháp rây” nổi tiếng.



Theo phương pháp này, ta viết các con số từ 1 - 100 rồi sàng ra các số nguyên tố trong các số tự nhiên từ 1 - 100.

Nhưng theo cách của Eratosthenes, liệu có tìm được số nguyên tố cuối cùng hay không? Và liệu các số nguyên tố có phải là hữu hạn hay không? Vào năm 275 năm trước Công nguyên, nhà toán học Hy Lạp kiệt xuất Ơclit (Euclide) đã dùng một phương pháp kì diệu để chứng minh các số nguyên tố là vô hạn.

Ơclit đã dùng phương pháp phản chứng để chứng minh luận đề vừa nêu. Trước hết ông giả thiết số các số nguyên tố là hữu hạn thì toàn bộ các số nguyên tố sẽ là 2, 3, 5, 7...*p*, trong đó *p* là số nguyên tố lớn nhất. Sau đó ta lập số A = 2. 3. 5. 7...*p* + 1.

Vậy chỉ có thể hoặc A chia hết cho các số nguyên tố hoặc bản thân nó là một số nguyên tố. Vì theo cách thành lập thì A không chia hết cho bất kì số nguyên tố nào từ 2, 3,...*p* vì số A chia cho các số bất kì 2, 3, 5 ...p thì đều có số dư là 1 tức là A không chia hết cho bất kì số nào trong các số 2,3, 5...p, điều đó có nghĩa là nó sẽ chia hết cho một số nguyên tố khác lớn hơn *p* và trái với giả thiết đặt ra. Vậy số các số nguyên tố là vô hạn.

Đây là một định lí quan trọng trong lí thuyết số. Lí thuyết số hay còn gọi là số luận là ngành toán học quan trọng, chủ yếu nghiên cứu các tính chất của số, trong đó có nhiều dự đoán, nhiều vấn đề hết sức lí thú, có nhiều vấn đề cho đến nay vẫn còn chưa được giải quyết. Giả thuyết Goldbach là một trong các số đó.

Từ khoá: *Số nguyên tố; Số luận Ơclit và Eratosthenes.*

15. Liệu có thể có công thức tính số nguyên tố?

Ta đã biết số nguyên tố chỉ có thể chia hết cho số 1 và chính số đó. Chúng ta còn biết là có thể nhận biết số nguyên tố qua "sàng Eratosthenes". Thế liệu có thể biểu diễn số nguyên tố bằng một biểu thức nào đó không hoặc liệu có công thức tuy không biểu diễn được hết các số nguyên tố, nhưng các số tính theo công thức đó đều là số nguyên tố?

Nhà toán học Pháp nổi tiếng Fecma đã đưa ra công thức dự đoán cách tính một số nguyên tố. Ông đã tìm thấy số:

$$F(n) = 2^{2n} + 1$$

trong đó khi n = 0, 1, 2, 3, 4 thì *F(n)* tính được là một số nguyên tố.

Nhưng về sau, nhà toán học Thuỵ sĩ Ơle đã chỉ ra rằng với n = 5 thì số $F(5) = 2^{25} + 1$ = 4294967297 = 641 x 6700417 là một hợp số vì vậy dự đoán Fecma bị bác bỏ. Từ đó lại có nhiều người tiếp tục đưa ra nhiều công thức qua đó có thể tính ra các số nguyên tố một cách tổng quát.

Trong lịch sử toán học, đã từng có nhiều công thức đề nghị tính số nguyên tố như:

$$f(n) = n^2 + n + 17$$

$$f(n) = n^2 - n + 41$$

$$f(n) = n^2 - n + 72491$$

$$f(n) = n^2 - 79n + 1601$$

Nhưng đáng tiếc là các công thức đưa ra dần dần đều bị bác bỏ.

Năm 1983 một người Trung Quốc đưa ra một dự đoán khác. Nếu cho p là một số lẻ thì có thể tính số nguyên tố theo p bằng công thức:

$$f(p) = {}^{1}/_{3}\,(2^{p} + 1)$$

Nhưng người ta đã tìm thấy với $p = 29$ thì dự đoán bị bác bỏ.

Trong thời gian đó ở các nước khác cũng có người đưa ra công thức tính số nguyên tố phụ thuộc hai tham số m và n:

$f(m,n) = {}^{n-1}/_{2}\{[m(n+1) - (n! + 1)]2 - [m(n+1)-(n!+1)]2 + 1\}+2.$

Trong đó m, n là các số tự nhiên n! = 1.2.3...n đọc là n giai thừa. Người ta đã kiểm chứng được

f(1,2) = 3

f(3,4) = 2

f(5,4) = 5

f(103,6) = 7

là các số nguyên tố.

Công thức đã được chứng minh bằng lí thuyết nhờ đó có thể biểu diễn được các số nguyên tố bằng công thức nhưng công thức quá phức tạp và ít có giá trị thực tiễn.

Từ khoá: *Công thức tính số nguyên tố.*

16. Vì sao trong ba số lẻ liên tiếp nhất định có hai số nguyên tố cùng nhau?

Với hai số nguyên bất kì nếu chúng không có ước số chung nào khác ngoài số 1, người ta gọi chúng là các số nguyên tố cùng nhau. Nếu trong ba số có hai số bất kì nguyên tố cùng nhau thì người ta gọi chúng là các số nguyên tố cùng nhau song song hay các số nguyên tố cùng nhau từng đôi một.

Tại sao với 3 số lẻ liên tiếp bất kì nhất định có hai số nguyên tố cùng nhau?

Chúng ta đã biết số lẻ là số không chia hết cho 2 vì vậy với số lẻ ta chỉ có ước số là các số lẻ.

Ví dụ số 15 chỉ có các ước số 1, 3, 5, 15 là các số lẻ.

Nếu hai số cùng là bội số của một số *p* thì hiệu của chúng cũng là bội số của *p*.

Ví dụ 100 và 15 đều là bội số của 5 thì hiệu số của hai số là 85 cũng là bội số của 5.

Từ các lí luận trên đây chúng ta có thể giải đáp câu hỏi "vì sao" đã đề ra.

Giả sử ta có 3 số lẻ liên tiếp, ta chọn một số là a thì số lớn sẽ là $b = a + 2$ hoặc $b = a + 4$. Nếu *a* và *b* có ước số chung là *p* thì *p* phải là ước số của hiệu số $b - a$, có nghĩa là *p* phải là ước số của 2 hoặc 4. Vì $p = 1$ nên *a* và *b* chỉ có ước số chung là 1. Từ đó nếu *a, b* là số lẻ thì ước số chung của chúng chỉ là 1. Vì *a* và *b* là các số lẻ nên chúng không có ước số chung là số chẵn. Chúng ta đã chứng minh *a* và *b* chỉ có ước số chung là 1 nên a và b phải là các số nguyên tố cùng nhau. Với ba số lẻ liên tiếp bất kì luôn có hai số nguyên tố cùng nhau.

Từ khoá: *Ước số, ước số chung;Số nguyên tố cùng nhau.*

17. Vì sao hai số hơn nhau không quá 2n lần trong 2n + 1 số tự nhiên khác nhau nhất định có hai số nguyên tố cùng nhau?

Câu trả lời đơn giản nhất là trong $n + 1$ số tự nhiên lớn hơn nhau không quá 2n lần nhất định sẽ có hai số cạnh nhau, hai số cạnh nhau tất nhiên phải là các số nguyên tố cùng nhau. Hai số cạnh nhau nếu có ước số chung là *p* thì *p* nhất định phải bằng 1. Thế tại sao trong $n + 1$ số tự nhiên không lớn hơn nhau quá *2n* lần nhất định phải có hai số cạnh nhau? Theo điều kiện đặt ra trong tập hợp từ các số tự nhiên số các số nguyên tố phải nhỏ hơn hoặc cùng lắm là bằng *2n*. Vả lại trong tập hợp không có các số cạnh nhau thì số các số nguyên tố tối đa chỉ là n. Ví dụ các tập hợp không có các số cạnh nhau là các tập hợp: {1, 3, 5, ...2n - 1} hoặc {2, 4, 6, ...2n}. Nếu ta lại thêm vào các tập hợp trên một số nào đó theo thứ tự các số tự nhiên thì tất nhiên phải là số cạnh nhau của $n + 1$ số trong mỗi tập hợp và tập hợp mới sẽ là tập hợp có các số cạnh nhau. Người chứng minh luận đề này là nhà toán học Hungari Potard lúc ông mới 12 tuổi.

18. Bài toán "Hàn Tín điểm binh" là thế nào?

Bài toán "Hán Tín điểm binh" là một trò chơi dự đoán số thú vị. Giả sử bạn cầm trong tay một số lá cờ (trên dưới 100 lá), trước hết bạn chập thành nhóm 3 lá, sẽ còn số dư khi số còn lại không đủ 3 lá ; sau đó lại chập thành nhóm 5 lá ghi lấy số dư ở nhóm không đủ 5; cuối cùng chập thành các nhóm có 7 lá, ghi lấy số ở nhóm không đủ 7 lá. Dựa vào số lá cờ dư ở các nhóm người ta có thể đoán số lá cờ đã có.

Ví dụ: Khi chập 3 dư 1 lá, chập 5 dư 2 lá, chập 7 dư 1 lá, vậy có bao nhiêu lá cờ?

Phương pháp giải khá đơn giản và ngay từ thời cổ đại ở Trung Quốc đã có lời giải. Vào thời nhà

Tống Chu Mật gọi là “Bài toán Quỉ cốc” hoặc “Toán Cách tường”, Dương Huy gọi là “bài toán chém ống” nhưng tên gọi bài toán “Hàn Tín điểm binh” là tên gọi phổ biến nhất. Cách giải được trình bày trong quyển sách toán cổ “Tôn tử toán kinh”. Về sau, Tần Cữu Thiều thời nhà Tống đã cải tiến và phổ biến rộng rãi với tên “Thuật toán Đại diễn” (giảng giải về cách tính toán). Đó chính là nội dung mà trong lịch sử toán học người ta gọi là định lí “thặng dư Trung Quốc”, một bài toán khá nổi tiếng.

Nội dung của phương pháp giải bài toán có thể biểu diễn bằng biểu thức dưới đây:

$$a \times 70 + b \times 21 + c \times 15 - 105$$

trong đó a, b, c là các số dư tương ứng khi chập 3, chập 5 và chập 7 các lá cờ. Nếu con số tính được lớn hơn 105 thì trừ cho 105 đến khi được một số nhỏ hơn 105 thì dừng lại. Theo cách giải này bài toán đoán số lá cờ ở trên đây sẽ có đáp án $1 \times 70 + 2 \times 21 + 2 \times 15 - 105 = 37$ lá.

Thế tại sao trong bài toán “Hàn Tín điểm binh” là cần bộ ba số 3, 5 và 7, liệu có thể dùng các bộ ba số khác được không? Để trả lời câu hỏi này ta cần nghiên cứu kĩ cách giải bài toán “Hàn Tín điểm binh”: “$70a + 21b + 15c - 105$”.

Ta cần xem xét các mối quan hệ của 4 số 70, 21, 15 và 105 với các số 3, 5, 7.

1) $70 = 2 \times 5 \times 7$; $70 = 3 \times 23 + 1$ nên 70 là bội số chung của 5 và 7 và khi chia cho 3 thì dư 1.

2) 21 là bội số chung của 3 và 7, 21 chia cho 5 thì dư 1.

3) 15 là bội số chung của 3 và 5, 15 chia cho 7 dư 1.

4) 105 là bội số chung nhỏ nhất của ba số 3, 5, 7.

Dựa vào mối quan hệ trên đây thì “$70a + 21b + 15c - 105$” chính là số phải tìm. Bởi vì:

$70a + 21b + 15c - 105 =$

$= (3 \times 23 + 1) \times 1 + (3 \times 7 \times 2) + (3 \times 5 \times 2) - (3 \times 5 \times 7)$

$= 3 \times 23 \times 1 + 1 \times 1 + 3 \times 7 \times 2 + 3 \times 5 \times 2 - 3 \times 5 \times 7$

$= 3 \times (23 \times 1 + 7 \times 2 + 5 \times 2 - 5 \times 7) + 1$

Vì vậy $70a + 21b + 15c - 105$ chia cho 3 có số dư là 1. Cũng lí luận tương tự đem số này chia cho 5 và cho 7 đều có số dư là 2.

Thế tại sao trong bài toán “Hàn Tín điểm binh” người ta lại dùng bộ ba số 3, 5, 7. Chúng ta biết rằng hai số bất kì trong ba số là các số nguyên tố từng đôi một (số nguyên tố cùng nhau, chỉ có ước số chung là 1). Từ đó nếu tìm được một số có tính chất là bội số chung của hai trong bộ ba số và khi đem chia cho số thứ ba mà có số dư là 1 như các số 70, 21, 15 thì đáp ứng yêu cầu của bài toán “Hàn Tín điểm binh”.

Thế với các số không nguyên tố cùng nhau thì có thể tìm được các số 70, 21 và 15 hay không? Ví dụ chọn ba số 4, 6, 7 trong đó hai số 4 và 6 không nguyên tố cùng nhau, có ước số chung lớn nhất là 2. Mà bội số chung của các số 6, 7 đều là các số chẵn nếu đem chia cho số 4 thì đều có số dư là số chẵn mà không thể là số 1, vì vậy chúng ta sẽ không tìm được sự tương hợp với 70, 21, 15. Nên bài toán “Hàn Tín điểm binh” không sử dụng được ba số không nguyên tố cùng nhau.

Chúng ta có thể bỏ bộ ba số khác với 3, 5, 7 mà dùng bộ ba số nguyên tố cùng nhau khác. Ví

dụ 2, 3, 11 biểu thức của giải pháp là “33*a* + 22*b* + 12*c* - 66”. Trong đó các số 33, 22, 12 và 66 thoả mãn 4 mối quan hệ như đã nêu ở trên và các bạn dễ dàng tìm thấy số phải tìm là 37.

Từ khoá: *Bài toán “Hàn Tín điểm binh”, định lí thặng dư Trung Quốc, số nguyên tố từng đôi một, bội số chung và bội số chung nhỏ nhất.*

19. Vì sao định lý thặng dư Trung Quốc có thể dùng để mã hóa máy tính?

Chúng ta đã biết đến định lí thặng dư Trung Quốc, tức vấn đề Hàn Tín điểm binh, đó là một thành tựu quan trọng trong toán học Trung Quốc cổ đại, với nội dung thuộc về giải pháp dãy đồng dư một lần trong lí thuyết số. Hiện nay, người ta đã tìm ra công dụng mới của thứ kiến thức cổ xưa này trong việc mã hóa máy tính.

Đáp án cho bài toán Hàn Tín điểm binh có thể là rất nhiều, giữa chúng lại có tương sai là 105 (tức 3 x 5x 7), song đáp án trong vòng 105 thì lại chỉ có một. Bây giờ chúng ta hãy giản hóa chúng: những số nguyên nào có thể chia 3 thì dư 2, chia 5 thì dư 3? Không khó để tìm ra là 8, 23, 38, 53,..., giữa chúng có tương sai 15 (tức 3 x 5). Còn đáp án cho trong vòng 15 chỉ có một: 8. Vậy thì, với đề bài như vậy có thể có bao nhiêu bài toán? Bài toán chia 3, số dư có thể là 0, 1, 2, tổng cộng 3 loại; Bài toán chia 5, số dư có thể là 0, 1, 2, 3, 4, tổng cộng 5 loại, hợp lại tổng cộng 3 x 5, tức 15 loại. Nghĩa là có thể có 15 đề bài như vậy, đáp án không giống nhau, hơn nữa đáp án trong vòng 15 thì lại chỉ có một. Có thể thấy, đáp án cho 15 đề bài này vừa vặn tương ứng với 1, 2, 3,..., 15.

Bây giờ, điền 15 số này vào hình vuông 3 hàng 5 cột (3 x 5), sao cho hàng ngang là các số chia cho 3 có dư; hàng dọc là các số chia cho 5 có dư. Ví dụ 8 là số chia cho 3 dư 2, thì điền vào hàng thứ hai, nó lại là số chia 5 dư 3, thì điền vào cột thứ ba.

	1	2	3	4	5
1	1	7	13	4	10
2	11	2	8	14	5
3	6	12	3	9	15

Bất cứ một máy tính nào cũng đều có một độ dài từ (word length) nhất định. Độ dài từ chính là con số (digit) lớn nhất mà máy tính có thể xử lí được. Vậy thì, khi chúng ta cần sử dụng máy tính để xử lí một dữ liệu có các số vượt quá độ dài từ đã định thì làm thế nào? Biện pháp thông thường là biểu thị số lớn ấy bằng hai số nhỏ hơn. Biện pháp đơn giản nhất là chia số lớn thành hai đoạn, như có thể chia 3517 thành hai số nhỏ hơn là 35 và 17. Nhưng làm như vậy thì máy tính khi thao tác sẽ khó hơn, cho nên người ta thường cho là không nên áp dụng.

Sử dụng định lí thặng dư của Trung Quốc có thể biểu thị (hoặc mã hóa) một số lớn bằng hai số nhỏ hơn, đồng thời lại khiến cho máy tính thao tác hết sức thuận tiện. Chúng ta hãy nhìn lại hình vuông 3x5 ở trên, 8 được sắp và hàng 2 cột 3, nó có thể biểu thị bằng 2 và 3; tương tự 15 có thể biểu thị bằng 3 và 5... Nếu như máy tính của chúng ta vốn chỉ có thể xử lí được các số trong vòng 15, thì hiện tại có thể xử lí được đến 15. Hơn nữa, sau khi mã hóa như vậy thao tác cũng sẽ rất thuận tiện.

Ví dụ, lấy số 2 ở cột hai, lấy số 3 ở cột ba, tích của chúng là 6, nằm ở cột một. Hơn nữa, tích của bất cứ số nào ở cột hai với bất cứ số nào ở cột ba cũng nhất định là nằm ở cột một (khi tích lớn hơn 15, có thể tiếp tục điền 16, 17... vào trong hình vuông 3 x 5 dựa theo phương pháp nói trên).

Vì sao lại như vậy? Thì ra, trong lí thuyết đồng dư thức, nếu

$$x_1 \equiv x_2 \text{ (mod5)}, y_1 \equiv y_2\text{(mod5)}$$

(tức x1 và x2 có số dư giống nhau sau khi trừ đi 5; y1 và y2 có số dư giống nhau sau khi trừ đi 5), vậy

$$x_1y_1 \equiv x_2\, y_2\text{(mod5)},$$

cũng tức là x_1y_1 và $x_2\, y_2$ có số dư giống nhau sau khi trừ đi 5. Sử dụng tính chất này thì sẽ chứng minh được, tích của số (cùng hàng có số dư giống nhau sau khi trừ đi 5) cùng cột với 2 và 3 phải có đồng dư 6, tức ở cùng cột.

Hàng đối cũng có kết quả tương tự.

Cứ như vậy, máy tính khi thao tác với các số lớn sẽ rất thuận tiện. Chẳng hạn, chúng ta muốn làm phép nhân 26, thì trước tiên phải tiến hành mã hóa cho hai số:

2 - (hàng hai, cột hai)

6 - (hàng ba, cột một)

Có thể chứng minh, tích của số ở hàng hai cột ba phải ở hàng ba; tích của số ở hàng hai cột một phải ở hàng hai. Thế là, tích có thể dùng 3 và 2 để biểu thị (hoặc mã hóa). Tra trong bảng sẽ biết được tích của 26 là 12.

Cũng có nghĩa là, đầu tiên biểu thị số lớn bằng hai số nhỏ (có kí hiệu thứ tự hàng, cột trong bảng); sau đó căn cứ theo kí hiệu thứ tự của hai hàng để định ra kí hiệu thứ tự hàng của tích hai số lớn, căn cứ theo kí hiệu thứ tự của hai cột để định ra kí hiệu thứ tự cột của tích; cuối cùng căn cứ theo kí hiệu thứ tự hàng và cột trong bảng sẽ tra ra được trị số của tích. Như vậy, máy tính sẽ rất dễ dàng tìm ra được tích số của các số lớn.

Vì thế, việc sử dụng định lí thặng dư của Trung Quốc để tiến hành mã hóa cho máy tính là hết sức hữu ích, trí tuệ của tổ tiên chúng ta đã được thể hiện thêm trong khoa học kĩ thuật hiện đại.

Từ khóa: *Định lý thặng dư, đồng dư, mã hóa.*

20. Làm thế nào biểu diễn một số thập phân tuần hoàn dưới dạng phân số?

Tất cả các phân số đều là các số lẻ thập phân hữu hạn, hoặc số thập phân vô hạn tuần hoàn. Các số lẻ có một số hữu hạn các chữ số gọi là số lẻ thập phân hữu hạn, ví như phân số $^1/_4$ = 0,25. Còn số $^{33}/_{99}$ lại là số thập phân vô hạn tuần hoàn, số các chữ số trong số lẻ này là vô hạn, trong đó số 3 được lặp đi lặp lại vô số lần. Người ta gọi nhóm số 3 là nhóm chữ số tuần hoàn.

Việc biểu diễn một số lẻ thập phân hữu hạn dưới dạng một phân số được thực hiện khá đơn giản; chỉ cần lấy nhóm chữ số sau dấu phảy làm tử số còn lấy số 10n làm mẫu số (n là số chữ số sau dấu phảy thập phân)

Ví dụ số 0,4713 = $^{4713}/_{10000}$

Thế còn với các số lẻ thập phân vô hạn tuần hoàn thì sẽ ra sao? Thoạt nhìn thì vấn đề trông có

vẻ phức tạp nhưng nếu nắm được quy tắc thì việc biểu diễn một số thập phân vô hạn tuần hoàn dưới dạng phân số cũng khá đơn giản.

Trước hết ta xét các ví dụ:

$0,333... = {}^{3}/_{9} = {}^{1}/_{3}$,

$0,212121... = {}^{21}/_{99} = {}^{7}/_{33}$

$0,324324324 ...= {}^{324}/_{999} = {}^{36}/_{111}$

Từ đó ta có thể rút ra quy luật: Lấy nhóm số tuần hoàn làm tử số, còn nhóm số gồm các con số 9: 99...9 làm mẫu số, số chữ số 9 trong nhóm phụ thuộc số các con số trong nhóm số tuần hoàn. Các bạn có thể tự mình kiểm tra tính đúng đắn của quy tắc này.

Nếu gặp trường hợp một số lẻ thập phân hỗn hợp gồm hai phần số lẻ thập phân hữu hạn và phần vô hạn tuần hoàn, trước hết ta cắt số lẻ thành tổng của hai phần, một phần là một số lẻ thập phân hữu hạn và một phần là số lẻ thập phân vô hạn tuần hoàn. Ví dụ: Xét số 3, 14212121...

$3, 14212121 = 3,14 + {}^{0,212121}/_{102} = 3,14 + {}^{21}/_{99} \text{ x } {}^{1}/_{102} = {}^{314}/_{100} + {}^{7}/_{3300} = {}^{10369}/_{3300}$

Mời các bạn thử biến đổi các số sau đây thành phân số:

1,42272727... =?

0,00313131... = ?

2,043521521521...=?

Từ khoá: *Số lẻ thập phân hữu hạn; Số lẻ thập phân vô hạn tuần hoàn; Nhóm số tuần hoàn; Phân số.*

$0,\dot{9}=1$

Không ít người cho rằng số 9 (dấu chấm trên chữ số 9 hàm ý là số 9 được lặp đi lặp lại nhiều lần ở sau dấu phảy thập phân). Cho dù con số 9 có lặp đi lặp lại bao nhiêu lần đi nữa thì số chỉ tiến dần đến 1 mà không bao giờ bằng 1. Thế nhưng đẳng thức = 1 có đúng không? Trước hết ta xét một vài ví dụ.

Ta xét một chuỗi số gồm số $^1/_2$, số đứng sau lại lấy số đứng trước chia đôi, và cứ thế tiếp tục...tức là chuỗi số gồm các hạng số là $1/_{2n}$. n có thể lớn tuỳ ý, ví dụ n = 1000000 v.v...Ta lập tổng số các số hạng, tức tính tổng S_n.

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n} \qquad (1)$$

Rõ ràng là S_n nhỏ hơn 1 một đại lượng . Và vì vậy *n* lớn đến vô hạn thì S_n tiến đến gần 1. Và 1 là cận trên của Sn. Ta viết

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots \qquad (2)$$

Rõ ràng đây là tổng các số hạng của một cấp số nhân có công bội là q với $|q| < 1$. ứng dụng công thức tính tổng số hạng của cấp số nhân (cộng bội q) ta có:

$$S_n = q + q^2 + \ldots q^n = \frac{q}{1-q} \qquad (3)$$

Từ đó nhanh chóng tính được:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

Tương tự, ứng dụng công thức (3) ta có thể tính được:

$$0,9 = 0,999\ldots9\ldots=$$
$$= \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots = \frac{9}{10}\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

Từ khoá: *Cấp số nhân.*

Ta xét việc thực hiện phép cộng hai số thập phân vô hạn tuần hoàn. Ví dụ: 0,142857 + 0,285714. Đây chính là hai số lẻ thập phân vô hạn tuần hoàn có thể biểu diễn thành hai phân số $^{1}/_{7}$ và $^{2}/_{7}$, tổng của chúng dĩ nhiên là và $^{3}/_{7}$ tổng này được biểu diễn thành số lẻ thập phân vô hạn tuần hoàn là $0,\dot{4}2857\dot{1}$. Thế nhưng liệu có thể thực hiện phép cộng các số lẻ thập phân vô hạn tuần hoàn trực tiếp mà không thông qua con đường biểu diễn thành phân số được không? Ta sẽ xét một số ví dụ sau đây.

1) Phép cộng các số lẻ thập phân vô hạn tuần hoàn có các nhóm số tuần hoàn giống nhau. Ví dụ đã xét trên kia chính thuộc vào trường hợp này. Thật vậy số $0,\dot{4}2857\dot{1}$ là do phép cộng trực tiếp các số lẻ thập phân vô hạn tuần hoàn có nhóm số tuần hoàn có số chữ số bằng nhau

$$\begin{array}{rr} & 0,\dot{1}4285\dot{7}1 \\ + & 0,\dot{2}8571\dot{4} \\ \hline & 0,\dot{4}2857\dot{1} \end{array}$$

Nguyên tắc chung là có thể cộng trực tiếp các vị trí của các chữ số trong nhóm số tuần hoàn theo như bình thường và thu được tổng số.

2) Cộng các số lẻ thập phân vô hạn tuần hoàn có các nhóm chữ số tuần hoàn không giống nhau. Ví dụ xét phép cộng các số $0,\dot{4}\dot{3} + 0,\dot{1}2\dot{3}$. Trước hết ta viết $0,\dot{4}\dot{3}$ thành $0,\dot{4}3434\dot{3}$ và số $0,\dot{1}2\dot{3}$ thành $0,\dot{1}2312\dot{3}$, người ta gọi đó là cách biểu diễn thành dạng "nhóm số tuần hoàn mở rộng". Thông qua nhóm số tuần hoàn mở rộng, hai số tuần hoàn vô hạn có thể được cộng trực tiếp và

$$0,\dot{4}\dot{3} + 0,\dot{1}2\dot{3} = 0,\dot{4}3434\dot{3} + 0,\dot{1}2312\dot{3} = 0,\dot{5}5746\dot{6}$$

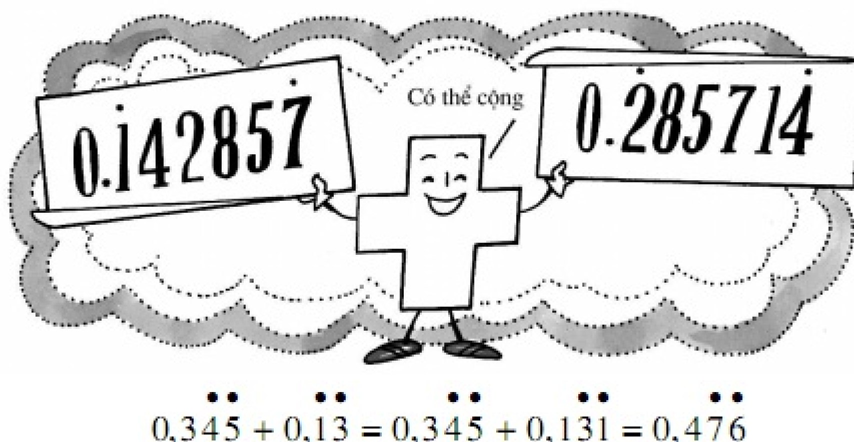
Cộng các số lẻ thập phân tuần hoàn

0,43 + 0,123 = 0,434343 + 0,123123 = 0,557466

3) Cộng các số lẻ thập phân tuần hoàn hỗn hợp.

Ví dụ với các số $0,3\dot{4}\dot{5} + 0,1\dot{2}\dot{3}$. Ở hai số này có các số lẻ sau dấu phảy thập phân bằng nhau từng đôi, hai bộ phận tuần hoàn và không tuần hoàn có các nhóm chữ số tuần hoàn có số các con số giống nhau tương ứng từng đôi nên có thể áp dụng nguyên tắc cộng các số lẻ thập phân hữu hạn để thực hiện phép cộng, kết quả nhận được tổng số $0,4\dot{6}\dot{8}$.

Với các số có các bộ phận không tuần hoàn và tuần hoàn không bằng nhau từng đôi thì sẽ ra sao? Ví dụ với tổng $0,345 + 0,\dot{1}\dot{3}$. Trước hết ta biến đổi 0,13 thành $0,1\dot{3}\dot{1}$, người ta gọi đó là nhóm số tuần hoàn lặp. Thông qua nhóm số tuần hoàn lặp ta có thể thực hiện việc cộng các số tuần hoàn hỗn hợp.



$$0,3\dot{4}\dot{5} + 0,\dot{1}\dot{3} = 0,3\dot{4}\dot{5} + 0,1\dot{3}\dot{1} = 0,4\dot{7}\dot{6}$$

Có khi người ta sử dụng cả nhóm số tuần hoàn mở rộng kết hợp nhóm số tuần hoàn lặp để thực hiện phép cộng. Ví dụ:

$$0,3\dot{5}\dot{4} + 0,41\dot{2}8\dot{3} = 0,35\dot{4}\dot{5} + 0,41\dot{2}8\dot{3} = 0,35\dot{4}54545\dot{5} + 0,41\dot{2}8328\dot{3} = 0,767\dot{3}782\dot{8}$$

Ở đây trong phép cộng các số lẻ thập phân ta có thể gặp vấn đề thay đổi vị trí của các chữ số, ví dụ vị trí chữ số của các nhóm số tuần hoàn có thay đổi sau phép cộng hay không? Ví dụ khi thực hiện phép cộng $0,\dot{7}\dot{2} + 0,\dot{4}\dot{3}$, ta có thu nhận được kết quả là 1, 15.

Vì $0,\dot{7}\dot{2} + 0,\dot{4}\dot{3} = \frac{72}{99} + \frac{43}{99} = \frac{115}{99} = \frac{116}{99} = 1,16$

Ở đây ta gặp hiện tượng tăng vị trí của chữ số đầu trong nhóm số tuần hoàn, chữ số tuần hoàn ở cuối cũng có hiện tượng tăng vị trí và đều tăng một vị trí.

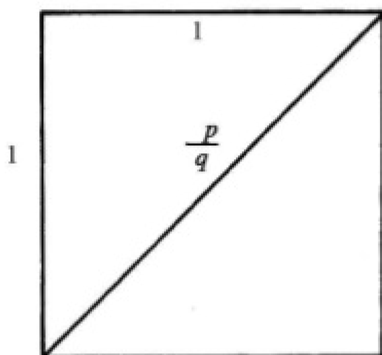
Người ta cũng có thể thực hiện phép trừ các số lẻ thập phân tuần hoàn. Các bạn có thể tự thể nghiệm.

Từ khoá: *Số lẻ thập phân vô hạn tuần hoàn; Nhóm số tuần hoàn.*

Câu hỏi này liên quan đến một câu chuyện cổ lí thú.

Vào thế kỉ thứ VI trước Công nguyên có nhà toán học cổ Hy Lạp là Pithagore, ông cho rằng trên đời chỉ có loại số nguyên và tỉ số giữa hai số nguyên (phân số). Ví dụ người ta có thể dùng số nguyên hoặc tỉ số giữa hai số nguyên để biểu diễn độ dài của một đoạn thẳng. Khi dùng lực như nhau để gảy lên các dây đàn có tỉ số độ dài bằng tỉ số các số nguyên như 2: 3 hoặc 3: 4 thì sẽ phát ra các hài âm (âm giai: âm thanh êm tai). Tóm lại theo quan điểm của Pithagore, “vạn vật trong vũ trụ đều liên quan với số nguyên”.

Thế nhưng thực tế lại không phải như vậy.



Một ngày kia, có một học sinh đặt ra cho Pithagore một câu hỏi: Liệu có thể dùng số nguyên hay tỉ số giữa hai số nguyên để biểu diễn đường chéo của hình vuông mà cạnh hình vuông bằng 1? Để trả lời câu hỏi này cần phải chứng minh. Pithagore đã tiến hành phương pháp chứng minh như sau đây:

Trên hình vẽ trình bày hình vuông cạnh bằng 1 và đường chéo giả sử được biểu diễn bằng số nguyên hay tỉ số của hai số nguyên $^{p}/_{q}$.



Theo định lí Pithagore ta có:

$(^{p}/_{q})^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

hay $p^2 = 2q^2$

Theo kết quả trên vì $2q^2$ là số chẵn nên p^2 là số chẵn (p không thể là số lẻ vì một số lẻ bất kì, ví dụ 2n + 1 khi nâng lên bình phương phải là số lẻ: $(2n+1)^2 = 4n^2 + 2n^2+1$.

Vả lại *p* và *q* không có ước số chung nên *p* đã là số chẵn thì *q* phải là số lẻ.

Nếu *p* là số chẵn, ta có thể đặt *p* = 2a do vậy

$p^2 = 4a^2 = 2q^2$ hay

$q^2 = 2a^2$

điều đó chứng minh q^2 là số chẵn và như vậy *q* cũng phải là số chẵn; như vậy trái với giả thiết đặt ra từ ban đầu và xuất hiện mâu thuẫn là q vừa là số lẻ vừa là số chẵn. Mâu thuẫn vừa nêu đã đẩy Pithagore vào chỗ bí nhưng cũng làm nhận thức về số của loài người tiến lên một bước.

Việc không thể dùng số nguyên hoặc phân số để đo độ dài của đường chéo hình vuông cạnh bằng 1 không có nghĩa là độ dài của đường chéo này không tồn tại. Thực ra ứng dụng định lí Pithagore ta dễ dàng tìm thấy độ dài của đường chéo là căn số bậc hai của số 2, tức số $\sqrt{2}$. Như vậy ngoài số nguyên và phân số (tỉ số hai số nguyên) người ta phát hiện một loại số mới mà thời đó còn chưa biết. Do số $\sqrt{2}$ không biểu diễn được thành tỉ số của hai số nguyên nên người xưa gọi đó là số vô tỉ (không biểu diễn được dưới dạng một tỉ số của hai số nguyên).

Từ khoá: *Số hữu tỉ; Số vô tỉ.*

Ta biết rằng trong phạm vi các số thực thì căn bậc hai của một số âm không có nghĩa, bởi vì số +2 nâng lên bình phương là +4 và số -2 nâng lên bình phương cũng là +4, không có số thực nào mà khi nâng lên bình phương là bằng -4. Từ đó người ta đi đến khái niệm số ảo. Thông thường người ta chọn i kí hiệu cho đơn vị ảo. Tại sao lại dùng chữ cái i làm đơn vị ảo?



Đó là do thuật ngữ trong tiếng Anh số ảo được viết là imaginary, i là chữ cái đầu của từ này nên người ta chọn i kí hiệu cho đơn vị ảo. Thế giá trị của i là bao nhiêu? i có mối liên quan với số thực theo hệ thức:

$$i^2 = -1$$

Tại sao người ta không chọn kí hiệu $\sqrt{-1}$ làm đơn vị ảo? $\sqrt{-1}$ là một số không phải là chữ cái, như vậy có đỡ rắc rối hơn không? Trong toán học, chúng ta có quy ước $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{1} = 1$ gọi là thuật toán khai căn và thuật khai căn là chỉ khai căn bậc hai của một số dương, còn $\sqrt{-1}$ lại là căn bậc hai của một số âm, nên không phù hợp với định nghĩa của phép khai căn bậc hai. Cho nên để được chặt chẽ, -1 là bình phương của hai số +i và -i tức $\sqrt{-1} = \pm$ i.

Vì $\sqrt{-1}$ không có quy định là đơn vị trong thuật toán khai căn và vì $\sqrt{-1}$ có thể được biểu diễn hoặc là +i hoặc là-i nên người ta không dùng kí hiệu $\sqrt{-1}$.

Trong khi giải phương trình bậc hai $x^2 = -2$ người ta biểu diễn kết quả nghiệm ở dạng số phức là $x = \pm \sqrt{-2} = \pm \sqrt{2}i$. Có thể được vì ở đây kí hiệu dương và âm đồng thời xuất hiện.

Giả sử ta lại giải phương trình $x^2 + x + 1 = 0$, nghiệm của phương trình được biểu diễn ở dạng:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

ở đây các kí hiệu dương và âm cũng đồng thời xuất hiện nên không gây nhầm lẫn.

Thế nhưng nếu viết $\sqrt{-2} = \sqrt{2}\, i$ lại không thích hợp vì thiếu giá trị âm.

Từ khoá: *Số ảo.*

Ta hãy quay về lai lịch của số ảo. Vào thế kỉ XVI, các nhà toán học Châu Âu đang có cuộc tranh luận sôi nổi về việc có nên tiến hành các phép toán với các số âm hay không, một cuộc tranh luận khác cũng được cuốn vào dòng xoáy, đó là việc khai căn bậc hai một số âm.

Số âm có căn bậc hai hay không, có thể có một số mà bình phương của nó là số âm hay không? Sau này do sự phát triển của toán học, một số nhà toán học đã phát hiện có một số phương trình bậc ba có nghiệm không thể không biểu diễn ở dạng căn bậc hai của các số âm. Nếu chấp nhận có

căn bậc hai của số âm thì vấn đề giải các phương trình có dùng căn thức hay không dùng căn thức đã được giải quyết. Không những thế, khi giải "phương trình bậc n có n nghiệm" người ta thu được kết quả đầy đủ nhất. Ngoài ra căn bậc hai của một số âm được chấp nhận vào các phép toán thì cũng cho các kết quả chính xác.

Vào năm 1545, nhà toán học Italia Cardan đưa ra cách biểu diễn có tính thoả hiệp là gọi căn bậc hai của một số âm là số có phần ảo, với ý nghĩa là mặc dù thừa nhận chúng là các số nhưng là số không thực, "số ảo", không giống như số thực là số có thể dùng để đo đếm các đồ vật thực. Đến năm 1632, nhà toán học Pháp Descartes đã chính thức cho căn bậc hai của một số âm được mọi người thừa nhận đó là số ảo.

Vào năm 1768, nhà toán học Thuỵ sĩ Euler lại cho giải thích về số ảo: "Do số ảo không nhỏ hơn số 0, không lớn hơn số 0 cũng không bằng số 0 nên nó không tồn tại trong phạm vi các số trong thực tế, nó chỉ tồn tại trong tưởng tượng". Đó là đại biểu cho thái độ và nhận thức của các nhà toán học thế kỉ XVIII đối với vấn đề căn bậc hai của số âm, đó cũng là phản ảnh ý nghĩa chữ "ảo" trong khái niệm số ảo.

Cho dù là trong thuật ngữ số ảo có chữ "ảo" và các nhà toán học không hề bỏ qua mà tiếp tục đào sâu, nghiên cứu. Vào thế kỉ XVIII - XIX các nhà toán học đã phát hiện nhiều tính chất và ứng dụng. Đặc biệt vào năm 1777, Euler đưa ra khái niệm "đơn vị ảo", ông chọn √-1 làm đơn vị ảo và dùng chữ i để biểu thị đơn vị ảo này, giống như số 1 là đơn vị của các số thực. Và vì vậy bất kì một số ảo nào cũng được biểu diễn là bội số của đơn vị ảo giống như số thực. Ví dụ:

$$\sqrt{-5} = \sqrt{5}.\ \sqrt{-1} = \sqrt{5}\, i$$

$$\sqrt{\frac{-1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{-1} = \sqrt{\frac{1}{2}}\, i$$

Nhờ vậy các nhà toán học không chỉ xem số thực và số ảo là đồng dạng với nhau và còn thống nhất thành tên gọi số phức, và số phức bao gồm cả số thực và số ảo. Nếu dùng kí hiệu $a + bi$, trong đó a và b là các số thực, i là đơn vị ảo. Khi $a = 0$ thì $a + bi = bi$ và là số ảo, nếu $b = 0$ thì $a + bi = a$ thì số đã cho là số thực. Số phức là do số thực và số ảo bổ sung cho nhau mà thành, không thể thiếu một phần.

Vào cuối thế kỉ XVIII nhà toán học Na Uy Wilser, nhà toán học Thuỵ Sĩ Aliam và nhà toán học Đức Gauss đã phát minh phương pháp biểu diễn số phức trên bằng các điểm đối ứng một - một trên ô vuông. Trên hệ trục toạ độ, trục hoành là trục thực, trục tung là trục ảo. Trên mỗi trục được chia theo đơn vị độ dài. Chỗ hai trục toạ độ giao nhau chọn là gốc trục O. Tính từ O, trên trục thực ta chia thành các điểm a đơn vị, trên trục tung chia thành b đơn vị. Nhờ đó với mỗi số phức bất kì $a + bi$ đều có thể biểu diễn bằng một điểm đối xứng. Loại trục toạ độ mô tả được gọi là hệ trục số phức, có gốc trục là O. Nhờ có hệ trục toạ độ phức người ta phát hiện được nhiều tính chất của số phức và chấp nhận sự tồn tại của số phức trên thực tế. Từ đó địa vị của số phức được xác lập và tồn tại thuật ngữ số phức.

Từ khoá: *Số ảo, số thực, số phức, toạ độ số phức.*

Số phức $a + bi$ có thể được xem là cặp số thực theo thứ tự (a,b), nó đối ứng nhau ở một điểm trên hệ tọa độ vuông góc. Theo gợi ý từ tư tưởng này, nhà toán học Ailen là Hamilton đã có ý đồ cấu tạo nên một loại số mới, loại số này bao hàm 3 phần tử (a,b,c). Trải qua nhiều năm thử nghiệm, Hamilton phát hiện thấy loại số mới mà ông muốn tìm mà chỉ có 3 phần tử là không được, nó buộc phải có 4 phần tử. Đó chính là bộ bốn.

Nói một cách đơn giản, bộ bốn là một loại số có dạng *a+bi+cj+dk, a, b, c, d* ở đây là các số thực, l, i, j, k là các phần tử đơn vị, mà i, j, k là là các hư số thỏa mãn với $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, đồng thời khi *i, j, k* nhân với nhau thì buộc phải thỏa mãn qui tắc sau: $ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$. Cả phép cộng và phép nhân của bộ bốn cũng đều có định nghĩa theo hệ thống.

Số phức $a + bi$, khi $b = 0$ sẽ là số thực a, cũng tức là, số thực có thể coi là một loại số phức đặc thù; tương tự, bộ bốn a+bi+cj+dk khi c = d = 0 thì sẽ là số phức $a + bi$, thế là số phức cũng có thể gán vào trong bộ bốn. Từ số thực, số phức đến bộ bốn, hệ số được mở rộng. Vậy thì, tính chất thuật toán của số thực, số phức trong bộ bốn có thay đổi gì không?

Thực tế, từ định nghĩa về bộ bốn có thể thấy, các phần tử đơn vị i, j, k nhân với nhau không thỏa mãn luật giao hoán của phép cộng, tức $ij \neq ji, jk \neq kj, ki \neq ik$, vì thế phép nhân của bộ bốn cũng không thỏa mãn với luật giao hoán. Đây là sự khác biệt cơ bản nhất giữa bộ bốn với các số trước đây.

Việc sáng lập ra bộ bốn đã mở rộng khái niệm về số, đã là sâu thêm nhận thức về các phép tắc thuật toán, có ảnh hưởng nhất định đến đại số lượng và phân tích lượng . Nó khiến cho các nhà toán học ý thức được rằng có thể tạo ra những số mới có nghĩa với tư cách là đối tượng nghiên cứu của toán học, loại số mới này không nhất định mang toàn bộ những tính chất đã có ở các số thường.



Từ khóa: *Bộ bốn.*

Nếu có người hỏi bạn “năm nay bạn bao nhiêu tuổi”. Bạn trả lời “tôi 15 tuổi”. Câu trả lời này hoàn toàn chính xác, nhưng con số 15 chỉ là con số gần đúng, không phải là số chính xác. Giả sử bạn lại có người bạn cũng ở độ tuổi 15 và nếu muốn biết chính xác ai có độ tuổi lớn hơn thì bạn phải biết bạn mình sinh vào tháng nào, nên để nói tuổi chính xác bạn phải nói là 15 tuổi, mấy tháng mới tương đối chính xác hơn một chút.



Còn muốn chính xác hơn phải nói cả ngày sinh, tức bạn phải trả lời 15 tuổi, mấy tháng mấy ngày thì mới biết ai lớn tuổi hơn. Giả sử có hai chị em sinh đôi thì muốn biết tuổi chị em lại phải biết hơn nhau mấy giờ hoặc mấy phút. Thực tế khi nói độ tuổi không mấy ai cần biết đến mấy năm, mấy tháng, mấy ngày, mấy giờ.

Mọi người đều biết một giờ chia thành 60 phút, mỗi phút chia thành 60 giây, một giây lại chia thành $^1/_{10}$,$^1/_{100}$,$^1/_{1000}$... giây và có thể tiếp tục chia nhỏ nữa.

Đương nhiên để nói độ tuổi thì không nhất thiết phải cần biết chính xác đến như vậy, thường người ta chỉ cần nói gần đúng mấy năm là đủ.

Nhưng trong công tác khoa học có nhiều vấn đề cần đến thời gian rất chính xác. Khi nghe thu thanh chúng ta thường nghe thấy tín hiệu báo giờ "tút, tút, tút...tút" từng giây rất chính xác, sai không đến mấy phần nghìn giây. Các nhân viên hàng hải dựa vào tín hiệu báo giờ này để xác định vị trí tàu thuyền. Trong vật lí nguyên tử lại có loại "siêu hạt" thời gian sống chỉ tính bằng 10^{-20} giây, đương nhiên là khi nói đến độ tuổi của "siêu hạt" phải tính đến từng 10^{-20} giây. Trong đời sống thường ngày khi nói đến giờ khắc có lúc gần đúng, có lúc chính xác, có lúc ước lượng gần đúng. Khi xét đến độ chính xác đến độ tuổi nào là do yêu cầu thực tế đặt ra. Khi nói đến độ tuổi của người thì không cần chính xác đến từng giây, thế nhưng khi nói đến "siêu hạt" thì người ta phải tính độ tuổi đến 10^{-20} giây.

Vì vậy, với các vấn đề khác nhau, việc chọn độ chính xác về các số đo là khác nhau. Các bạn thử xem khi đo độ dài của vải và độ dài của đường cái quan thì rõ ràng là độ chính xác cũng cần khác nhau rồi.

Từ khoá: *Giá trị gần đúng.*

Khi mới học số thập phân đúng, dường như câu hỏi trên là hơi thừa. Vì 0,1 = $^1/_{10}$ và 0,10 = $^{10}/_{100}$. Nếu ước lược số $^{10}/_{100}$ thì đó chính là $^1/_{10}$ nên có thể đi đến kết luận hai cách viết hoàn toàn giống nhau. Nói chung ta thấy cách viết 0,10 không phải là cách viết phân số tối giản nên con số 0 cuối cùng không cần viết.



Thế nhưng khi bàn đến số lẻ thập phân gần đúng vấn đề lại có khác. Khi biểu diễn một số lẻ thập phân gần đúng, trên thực tế là bàn về phạm vi giá trị của một số. Khi cần bàn đến độ chính xác của một số lẻ thập phân ta cần giá trị thực sai lệch trong phạm vi nhỏ nhất có thể được.

Theo nguyên tắc làm tròn số lẻ thập phân "bỏ bốn lấy năm" thì 0,1 có thể từ số lẻ thập phân 0,05 được làm tròn mà có, cũng có thể từ số 0,14 "bỏ bốn" mà nhận được số 0,1. Vì vậy số lẻ thập phân gần đúng số 0,1 có thể biểu diễn từ 0,05 - 0,15 và nếu x là số lẻ thập phân gần đúng đó, ta có thể viết:

$$0,05 \le x < 0,15.$$

Thế nếu viết 0,10 thì sẽ như thế nào? Số lẻ thập phân gần đúng này sẽ là từ số 0,095 theo quy tắc làm tròn "lấy năm" mà có cũng từ quy tắc "bỏ bốn" từ số 0,104. Nếu ta dùng x để biểu diễn số đó thì

$$0,095 \le x < 0,105$$

Và phạm vi của con số sẽ nhỏ hơn 0,1 nhiều.

Nếu quan sát trên trục số thì hiển nhiên phạm vi của 0,10 sẽ nhỏ hơn 0,1 nhiều. Vì vậy khi xử lí các số lẻ thập phần gần đúng thì 0,1 và 0,10 hoàn toàn khác nhau.

Khi viết số lẻ thập phân đúng thì nên viết 0,10 là 0,1, con số không ở cuối là thừa và không cần thiết.

Trong khi xử lí số lẻ thập phân gần đúng thì con số 0 ở số 0,10 là rất quan trọng.

Từ khoá: *Số lẻ thập phân chính xác và số lẻ thập phân gần đúng.*

Các phép toán số học được chia làm ba cấp: phép cộng, phép trừ là cấp một, phép nhân, phép chia thuộc cấp hai, phép luỹ thừa và khai phương thuộc cấp ba.

Cấp một là cấp thấp nhất, cấp hai cao hơn cấp một và cấp ba là cấp cao nhất. Thứ tự tiến hành các phép toán có liên quan chặt chẽ với các cấp của các phép toán. Với các phép toán đồng cấp thì ưu tiên theo thứ tự từ trái sang phải. Còn các phép toán không đồng cấp thì thực hiện ưu tiên từ cấp cao đến cấp thấp.

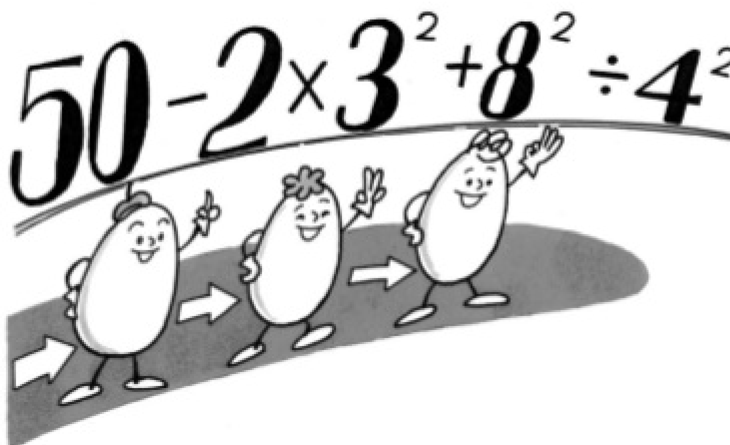
Vì sao lại phải chia các phép toán số học thành ba cấp?

Trong phép toán số học có 5 quy tắc trong thực hiện các phép toán: Luật kết hợp, luật giao hoán trong phép cộng, luật giao hoán và kết hợp trong khi thực hiện phép nhân, luật phân bố khi thực hiện phép nhân kết hợp phép cộng. Trước hết ta xem xét luật phân bố khi kết hợp phép cộng với phép nhân:

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

phép nhân cũng có luật phân bố khi kết hợp với phép trừ

$$(a - b) \times c = a \times c - b \times c$$



Phép chia cũng có luật phân bố khi kết hợp với phép cộng và phép trừ

$$(a + b): c = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$(a - b): c = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$$

Từ đó có thể khái quát phép tính cấp hai có tính chất phân bố với các phép tính cấp một.

Chúng ta đều biết phép tính trừ chính là phép cộng với một số trái dấu. Ví dụ 3 - 2 = 3 +(-2). Như vậy phép tính trừ có thể quy về phép tính cộng. Còn phép chia chính là phép nhân với một nghịch đảo của một số. Ví dụ: 3: 2 = 3 x $^1/_2$

$$\frac{1}{3} : \frac{4}{5} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{4}$$

Vậy với phép tính chia ta có thể quy về phép tính nhân. Vì vậy tính chất phân bố của phép tính nhân với phép tính cộng là một quy luật có tính cơ bản trong khi tiến hành tính toán.

Rõ ràng là $(ab)^n = a^n b^n$

Như $(3.2)^4$ = (3.2).(3.2).(3.2).(3.2)

= (3.3.3.3).(2.2.2.2)

= $3^4.2^4$

Vì vậy phép tính luỹ thừa cũng thể hiện luật phân bố với phép tính nhân. Tương tự phép tính luỹ thừa cũng có tính chất phân bố với phép tính chia

$(a: b)^n = a^n: b^n$

Vì vậy ta thấy các phép tính cấp ba thể hiện luật phân bố với phép tính cấp hai. Ta có thể tiến lên khái quát cao hơn một bước. Các phép toán cao hơn một cấp thể hiện luật phân bố cho các phép toán cấp thấp hơn một cấp. Khi đã nhận thức được các cấp của phép tính số học ta có thể nhanh chóng tiến hành chính xác các phép toán số học. Có điều cần chú ý là các phép tính số học cấp ba không có luật phân bố với các phép toán cấp một.

Từ khoá: *Thứ tự thực hiện các phép tính số học.*

Bạn chọn tuỳ ý bốn số tự nhiên liên tiếp, thành lập tích của chúng và cộng thêm 1, không kể kết quả phép tính là bao nhiêu nhưng điều chắc chắn số nhận được sẽ là một chính phương.

Bạn có tin không? Hãy xem các kết quả sau đây:

$$1.2.3.4 + 1 = 25 = 5^2$$

$$2.3.4.5 + 1 = 121 = 11^2$$

$$3.4.5.6 + 1 = 361 = 19^2$$

$$4.5.6.7 + 1 = 841 = 29^2$$

....

Bạn có thể tiếp tục tính toán và kết quả tất yếu sẽ là các số chính phương. Vì sao lại nhận được kết quả như vậy?

Giả sử trong số bốn tự nhiên liên tiếp ta chọn số nhỏ nhất là a, ta xét xem tích số sau đây có phải là số chính phương hay không:

$$a(a + 1) (a + 2) (a + 3) + 1$$

Ta biết

$a(a + 1)(a + 2) (a + 3) + 1 = (a^2 + 3a)(a^2 + 3a + 2) + 1$

$= (a^2 + 3a)2 +2(a^2 + 3a) +1$

$= (a^2 + 3a + 1)2$

Vì a là số tự nhiên nên $(a^2 + 3a + 1)^2$ phải là một chính phương. Thông qua phép dẫn giải trên ta không chỉ biết số $a(a + 1)(a + 2)(a +3 + 1)$ là một chính phương mà còn biết số chính phương là bình phương của số nào?

Ví dụ 10 x 11 x 12 x 13 = ?

Biết $a = 10$ nên $a^2 + 3a + 1 = 131$

nên 10 x 11 x 12 x 13 + 1 =$(131)^2$

Tương tự bạn cũng có thể tìm thấy

15 x 16 x 17 x 18 + 1 = ?

Với cùng lí luận tương tự bạn cũng có thể tìm thấy tích của 4 số chẵn liên tục (4 số lẻ liên tục) cộng với 16 cũng là một số chính phương.

Từ khoá: *Số chính phương hoàn toàn.*

31. Thế nào là bài toán bức màn đẳng thức của các tổng số?

Ta hãy xét xem hai tổng mỗi tổng là sáu số tự nhiên:

$1 + 6 + 7 + 17 + 18 + 23 = 2 + 3 + 11 + 13 + 21 + 22$

Bạn sẽ thốt lên thế thì có gì là lạ

$1^2 + 6^2 + 7^2 + 17^2 + 18^2 + 23^2 = 2^2 + 3^2 + 11^2 + 13^2 + 21^2 + 22^2$

Bây giờ chắc bạn sẽ cảm thấy có điều khác thường. Quả là bạn sẽ thấy hết sức thú vị khi ta tiếp tục:

$1^3 + 6^3 + 7^3 + 17^3 + 18^3 + 23^3 = 2^3 + 3^3 + 11^3 + 13^3 + 21^3 + 22^3$

$1^4 + 6^4 + 7^4 + 17^4 + 18^4 + 23^4 = 2^4 + 3^4 + 11^4 + 13^4 + 21^4 + 22^4$

$1^5 + 6^5 + 7^5 + 17^5 + 18^5 + 23^5 = 2^5 + 3^5 + 11^5 + 13^5 + 21^5 + 22^5$

Thế nhưng liệu có điểm dừng hay không? Các đẳng thức bậc 6 bậc 7 v.v... dù có thực hiện khó khăn bạn cũng có thể tìm được và tấm màn đẳng thức chỉ dừng lại ở luỹ thừa bậc 9.

Ví dụ ở bậc	1	Số thu được sẽ là	285
	2		11.685
	3		536.085
	4		26.043.813
	5		1.309.753.125
	6		67.334.006.805
	7		3.512.261.547.765
	8		185.039.471.773.893

Hai nhóm số này do Fuyi nghĩ ra. Quả là kì diệu. Thế nhưng cơ sở của chúng là gì, dựa vào đâu người ta nghĩ ra. Ngoài hai nhóm số này còn con số nào khác không?

Nhà toán học nổi tiếng Liên Xô trước đây- Gelfan đã giải đáp câu hỏi này. Nguyên do các nhóm số này xuất phát từ các hằng đẳng thức sau đây:

$a^n + a(a + 4b + c)^n + (a + b + 2c)^n + (a + 9b + 4c)^n + (a + 6b + 5c)^n + (a + 10b + 6c)^n =$

$= (a + b)^n + (a + c)^n + (a + 6b + 2c)^n + (a + 4b + 4c)^n + (a + 10b + 5c)^n + (a + 9b + 6c)^n$

Trong đó $n = 1,2,3,4,5$. Các nhóm số vừa nêu trên tạo thành từ $a = 1$, $b = 1$, và $c = 2$. Nếu chọn *a, b, c* là các số khác người ta sẽ nhận được các nhóm số khác có tính chất tương tự và không kể hết được.

Vấn đề tương tự gọi là “vấn đề bức màn đẳng thức các tổng số luỹ thừa *k*”, gọi vắn tắt là “vấn đề bức màn đẳng thức các tổng số”.



Nhà toán học Trung Quốc quá cố Hoa La Canh đã từng nghiên cứu và đã đạt được nhiều thành quả. Hiện tại người ta đã tính đến các luỹ thừa bậc 9, bậc 10, thế nhưng vấn đề còn chưa được giải quyết đến cùng. Luỹ thừa bậc cao nhất vẫn chưa tìm thấy. Liệu k có giới hạn trên không? Vượt qua giới hạn đó liệu có thể đẳng thức còn đúng không?

Từ khoá: *Bức màn đẳng thức lũy thừa k.*

32. Thêm dấu vào các chữ số của đồng hồ để tổng đại số của các con số bằng 0?

Trong một quyển sách toán cấp hai có một bài toán khá lí thú sau đây: Trên mặt đồng hồ có 12 con số, bạn hãy đặt các dấu cộng (+) dấu trừ (-) trước các con số để tổng đại số của các con số bằng không. Bạn có thể thực hiện được yêu cầu đó không?

Thực ra bạn chỉ cần suy nghĩ một chút có thể tìm ngay được một đáp án: Trước các con số 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 đặt dấu cộng (+) còn trước các con số 6, 10, 11, 12 đặt dấu trừ (-), do đó ta có: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 9 + (-6, -10, -11, -12) = 39 - 39 = 0. Do đó ta thấy đó là đáp án đúng.

Bài toán này có 124 đáp án nên việc tìm hết được các đáp án không phải một việc dễ. Nhưng nếu chú ý bạn có thể tìm được quy luật và có thể tìm được nhiều đáp án.

Trước hết ta biết rằng một cặp số cùng giá trị bằng số nhưng trái dấu thì tổng của chúng bằng không. Ta lại biết 1 + 2 + 3 +... + 12 = 78 nên chỉ cần phân 12 số thành hai nhóm, mỗi nhóm có tổng bằng 39, sau đó ta đặt dấu ngược nhau trước mỗi nhóm: trước một nhóm ta đặt dấu dương (+) còn trước nhóm kia ta đặt dấu âm (-) thì sẽ làm tổng đại số của 12 con số sẽ bằng không.

Hai là ba số lớn nhất trong 12 con số có tổng số là 10 + 11 + 12 = 33 nhỏ hơn 39; còn tổng của các số nhỏ còn lại là 1 + 2 + 3 +...+ 9 = 45 lớn hơn 39 nên khi chia các số thành nhóm thì ít nhất có thể là bốn số và số con số tối đa trong một nhóm số là tám, như vậy số các con số trong một nhóm chỉ có thể là 4 và 8, 5 và 7, 6 và 6.

Ba là giả sử ta chia 12 con số này thành hai nhóm là A và B mỗi nhóm có tổng các số là 39, với nhóm A ta đánh dấu cộng (+) trước mỗi con số và nhóm kia ta đặt dấu trừ (-), như vậy ta sẽ có hai đáp án. Ví như (+1, +2, +3, +4, +6, +11, +12); (-5, -7, - 8, -9, -10) và (-1, -2, -3, -4, -6, -11, -12); (+5, +7, +8, +9, +10)

Bạn hãy dựa vào quy luật trên và thử tìm xem.

Từ khoá: *Tổng đại số.*

33. Cậu bé Karl (Gauss) làm thế nào để tính tổng dãy số 1 + 2+ 3 +...+100?

Truyện kể rằng nhà toán học Đức Karl-Frederich. Gauss ngay từ lúc còn rất bé đã biểu hiện khả năng tính toán phi thường. Khi là học sinh tiểu học, vào năm 10 tuổi, thầy giáo ra một đề toán 1 + 2 + 3 +...+ 100 bằng bao nhiêu? Để xem ai tính nhanh hơn. Khi thầy vừa đọc xong đề toán, cậu bé Gauss đã trả lời ngay tổng của 100 số đó là 5050.

Các bạn học nghe câu trả lời của Karl vừa kinh ngạc vừa tỏ ý nghi ngờ. Chỉ thầy giáo mới biết chắc chắn đó là đáp số đúng. Thế cậu bé Karl đã tính như thế nào?

Cậu bé Karle cho biết 100 con số từ 1 đến 100 có đặc tính là tổng con số đầu và con số cuối là 101, số thứ hai và số áp cuối cùng cũng có tổng bằng 101, có tất cả 50 đôi số như vậy từ số 1 đến số 100. Tổng của 50 đôi số này sẽ là 101 x 50 = 5050

Ta sẽ xem cụ thể 50 đôi số như sau:

1	2	3...	48	49	50
100	99	98	53	52	51
101	101	101	101	101	101

Người ta còn kể nhiều chuyện về tài quan sát tinh tế của Gauss. Ví như có lần khi cậu bé Karl đứng gần cha và xem cha tính sổ thu nhập. Khi cha ông tính xong, ông nhìn cha và nói “Cha tính sai rồi...Kết quả phải là...” Cha cậu lấy làm kinh ngạc và thấy con mình đã nói đúng. Lúc đó cậu bé Carl đã học toán chưa? Chưa, vì lúc đó cậu bé Carl mới ba tuổi chưa đầy 3 tuổi! Do cậu yêu thích “con số” và tính toán ngay từ lúc còn nhỏ nên đã học được cách tính toán khi mà người lớn còn chưa chú ý.

Về sau Gauss đã chuyên tâm học toán, đến độ tuổi thanh niên ông đã trở thành nhà toán học nổi tiếng. Ông quan tâm nghiên cứu và hứng thú với nhiều lĩnh vực: ngôn ngữ cổ đại, thiên văn, vật lí ông đều quan tâm nghiên cứu, đã có nhiều phát hiện và phát minh. Ông là nhà thiên văn học, nhà vật lí lỗi lạc.

Gauss cũng như nhiều nhà khoa học khác, ngay từ nhỏ đã có óc quan sát tinh tế, chú ý đến mọi hiện tượng xảy ra xung quanh, từ đó đã khai sáng và có các cống hiến vĩ đại.

Từ khoá: *Gauss.*

34. Có phải các phương trình đều có thể giải bằng công thức không?

Nhiều người thích dùng công thức khi giải các phương trình vì chỉ cần theo các quá trình và quy phạm không cần phải tốn nhiều suy nghĩ. Ví như giải phương trình bậc hai ax^2 + bx + c = 0 (trong đó a ≠ 0) ta chỉ cần dùng công thức:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ta có thể đưa ra hai nghiệm của phương trình. Vì vậy trong thời gian dài, người ta bỏ công tìm

các công thức để giải phương trình các bậc, và trở thành một vấn đề quan tâm trọng điểm của đại số học.

Vào năm 1535, nhà toán học Italia lần đầu tiên tìm ra công thức để giải phương trình bậc ba. Họ tìm cách biến đổi phương trình bậc ba thành phương trình bậc hai, sau đó nhờ giải phương trình để tìm các nghiệm. Nhờ ý tưởng của phương pháp này, về sau nhà toán học Italia Ferali đã tìm công thức để giải phương trình bậc 4 và lần nữa chứng minh tính hữu hiệu của ý tưởng này.

Như vậy các phương trình bậc hai, bậc ba, bậc bốn đều có thể giải qua các công thức. Vậy với các phương trình bậc năm, bậc sáu và bậc cao hơn có thể dùng công thức để giải được không? Xuất phát từ nhận thức này từ thế kỉ XVII trở đi, các nhà toán học đều ra sức tìm các công thức để giải các phương trình bậc năm và bậc cao hơn.

Có điều lạ là vào thế kỉ XVI, nhà toán học Ferali 20 tuổi, không tốn nhiều thời gian lắm đã tìm ra công thức giải phương trình bậc bốn, điều mà trong suốt hai thế kỉ XVI, XVII không ít nhà toán học tài ba đã nghiên cứu mong tìm cách giải phương trình cao hơn một bậc là phương trình bậc năm nhưng không tìm thấy công thức.

Thế có phải với các phương trình từ bậc 5 trở lên không giải được bằng công thức? Vấn đề này được đặt ra vào năm 1824. Nhà toán học Na uy 22 tuổi là Abel sau bốn năm nỗ lực đã chứng minh: với các phương trình có bậc bằng 5 hoặc lớn hơn không thể biểu diễn các nghiệm của chúng qua các hệ số bằng các phép tính số học cơ bản (cộng, trừ, nhân, chia, khai căn, luỹ thừa..). Từ đó vấn đề tìm công thức để giải phương trình bậc cao từ bậc 5 trở đi mới kết thúc.

Thế nhưng lí luận về giải các phương trình chưa chấm dứt. Những kết quả của Abel không hề nói là không có công thức để biểu diễn các phương trình có bậc lớn hơn hoặc bằng 5. Ví dụ với phương trình $x^5 = N$, với phương trình đơn giản này ta có thể tính trực tiếp nghiệm bằng phép toán khai căn. Do đó vấn đề được đẩy lên một bước mới. Các nhà toán học đưa ra luận đề với phương trình bậc cao phải có dạng như thế nào thì có thể biểu diễn nghiệm qua các hệ số phương trình thông qua các phép toán số học? So với luận đề trước đây, vấn đề đặt ra ở đây đã sâu sắc hơn.

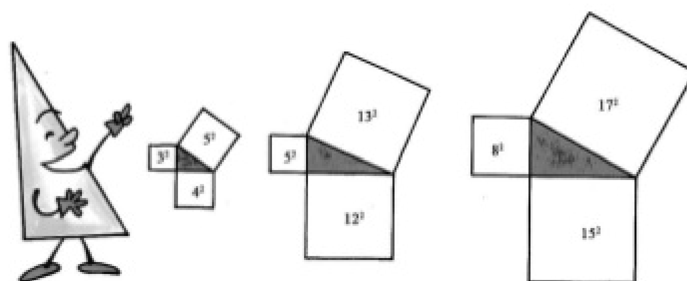
Vào năm 1831, nhà toán học Pháp 20 tuổi là Galois đã đưa ra một hình thức trả lời vấn đề đặt ra một cách sắc bén và nhanh chóng. Galois đã xây dựng nên lí thuyết nhóm Galois là cơ sở cho đại số học hiện đại. Dựa vào lí thuyết nhóm Galois, Galois đã đưa ra điều kiện để một phương trình đại số bậc cao có thể giải được bằng căn thức đó là “phán đoán Galois”. Từ “phán đoán Galois” cũng đi đến kết luận là các phương trình tổng quát bậc lớn hơn hoặc bằng 5 (bậc $n \geq 5$) không giải được bằng căn thức. Từ đó có thể thấy rằng định lí Abel chỉ là một hệ quả của lí thuyết Galois.

Từ khoá: Phán đoán Galois và lí thuyết nhóm.

35. Thế nào là nhóm số tam giác?

Trong bộ sách toán cổ nổi tiếng của Trung Quốc “Chu Bì toán kinh” ở chương I có nêu lên bộ số tam giác 3, 4, 5. Sở dĩ gọi là bộ số tam giác là ba chữ số này biểu diễn mối liên quan giữa hai cạnh của tam giác vuông với cạnh huyền có độ dài tương ứng là 3, 4, 5. Ba số 3, 4, 5 là bộ số tam giác vì đó là ba số của các cạnh của góc vuông với cạnh huyền theo đúng định lí mà người ta thường gọi là định lí Pitago (Pythagore).

Ngoài ba số 3, 4, 5 còn có nhiều bộ ba số khác tuân theo định lí Pitago như: 5, 12, 13; 8, 15, 17 v.v... Các bộ ba số này thoả mãn phương trình $x^2 + y^2 = z^2$; các số x, y, z thoả mãn phương trình này gọi là bộ số tam giác. Vì phương trình trên là phương trình có ba ẩn số, nên có vô số nghiệm, người ta gọi đây là loại phương trình vô định. Rõ ràng là nếu 3 số x, y, z là bộ số Pitago thì bộ ba số (kx, ky, kz) cũng là bộ số Pitago. Và nếu hai số x, y có ước số chung là d, thì d cũng là ước số của z. Nói cách khác bộ số Pitago nếu có ước số chung thì các ước số phải bằng nhau. Vì vậy khi xem xét ta chỉ chú ý đến các số nguyên tố cùng nhau.



Vậy các số trong bộ số Pitago có mối quan hệ gì với nhau không, hay nói cách khác, bộ số Pitago được cấu tạo như thế nào?

Vào thế kỉ thứ VI trước Công nguyên, nhà toán học cổ Hy Lạp Pitago đã đưa ra phương pháp: lấy một số lẻ tuỳ ý nâng lên luỹ thừa bậc hai rồi phân chia thành hai số sai khác nhau 1 đơn vị thì số thu được là một bộ ba số Pitago. Ví dụ lấy số 2x + 1, nâng lên luỹ thừa hai ta có $4x^2 + 4x + 1$, chia số vừa thu được thành hai số sai khác nhau 1 đơn vị là $2x^2 + 2x$ và $2x^2 + 2x + 1$.

Vậy ba số 2x + 1, $2x^2 + 2x$ và $2x^2 +2x + 1$ là một bộ số Pitago. Ví như bộ số 67, 2244 và 2245 là bộ số Pitago.

Vào thế kỉ thứ nhất sau Công nguyên, trong “Sách toán chín chương” còn đưa ra một phương pháp khéo léo hơn; ta chọn các số *m, n* thế thì $(m^2 - n^2)$, *mn* và $^1/_2(m^2 + n^2)$ sẽ là một bộ số Pitago. Ví dụ m = 7, n = 3, ta có thể tính ra các số 20, 21, 29 là một bộ số Pitago; Khi *m* = 5 và *n* = 3, ta tính ra 8, 15, 17. Vào thế kỉ thứ ba sau Công nguyên, nhà toán học Trung Quốc Lưu Huy đã chứng minh phương pháp này bằng phương pháp hình học.

Cũng vào thế kỉ III, nhà toán học cổ Hy Lạp Diophan đã đưa ra công thức:

$$\frac{2mz}{m^2+1},\ m\frac{2mz}{m^2+1} - z,\ z.$$

Nếu chọn $m = {}^u/_v$, $z = u^2 + v^2$, ta sẽ nhận được các số *2uv*, $u^2 - v^2$, $u^2 + v^2$. Bạn có thể tìm thấy công thức này chỉ khác công thức trong “Sách toán chín chương” ở hệ số 2, còn công thức Pitago cũng chính là trường hợp đặc biệt của công thức này. *u = z + 1, v = z.*

Vậy nếu tuỳ ý chọn hai số *m, n* hoặc *u, v* liệu có thể dùng công thức nêu trên để tính các bộ số Pitago được không? Đương nhiên là không. Vậy thêm điều kiện cho hai số *m* và *n* là chúng phải là các số nguyên tố cùng nhau. Với điều kiện đặt ra thì dùng công thức nêu trong “Sách toán chín chương” ta có thể tìm ra bộ số Pitago, vì vậy người ta gọi chúng là công thức chung để biểu diễn nghiệm của phương trình $x^2 + y^2 = z^2$. Đương nhiên có thể dùng các công thức khác nhau để tính bộ số Pitago.

Quan sát kĩ bộ số tam giác ta thấy chúng có mối tương quan nhất định về tính chẵn lẻ của các số, ví dụ có thể là hai lẻ một chẵn. Như *x, y, z* là bộ số Pitago thì hai số x, y phải là số chẵn, một lẻ, thì *z* phải là số lẻ. Tại sao như vậy các bạn hãy tự suy nghĩ và chứng minh.

Từ khoá: *Định lí tam giác; Bộ số tam giác.*

36. Tam giác Pascal là gì?

Vào năm 1261, nhà toán học Trung Quốc thời Nam Tống là Dương Huy trong tác phẩm “Giải thích sách toán chín chương” đã trình bày một bảng số mà các số được trình bày trên một hình tam giác (xem hình vẽ).

Theo Dương Huy bảng số này ông đã dẫn ra từ bộ sách của Giả Hiến “Nguồn gốc của phép toán khai phương” và “Phương pháp nâng luỹ thừa và khai phương”, vì vậy tam giác này được gọi là “Tam giác Giả Hiến”. Ở Châu Âu bảng tam giác được Pascal nghiên cứu và tìm ra năm 1654, so với Giả Hiến thì chậm hơn 600 năm.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Thế nhưng tam giác Giả Hiến có tác dụng gì? Các con số trong tam giác Giả Hiến chính là hệ số của các luỹ thừa của nhị thức a + b khi khai triển. Ví dụ”

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^2 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

……………………………………

Dựa vào bảng số tam giác này ta có thể biết

$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

Hàng thứ nhất của bảng cũng có ý nghĩa vì chỉ cần $a + b \neq 0$ thì $(a + b)^0 = 1$.

Quan sát kĩ các số ở trong bảng, ta có thể nhận biết quy luật sắp xếp: Các số ở ngoài biên bao giờ cũng là 1, các số đứng giữa ở hàng dưới là tổng của hai số kèm hai bên ở hàng trên. Theo quy luật này ta có các số ở các hàng tiếp sau, và chúng ta sẽ nhận được các hệ số của các khai triển của luỹ thừa bậc n của nhị thức $(a + b)^n$.

Vậy ban đầu người ta đã lập nên bảng số như thế nào? Theo các ghi chép còn lại trong lịch sử phương pháp của Giả Hiến chính là phương pháp “Nâng dần luỹ thừa”. Sở dĩ gọi là phương pháp nâng dần luỹ thừa vì các con số được thu nhận từ cách nâng dần luỹ thừa của nhị thức. Ví dụ để lập một “Tam giác Giả Hiến” có tám hàng trước hết ta viết bảng số dưới đây:

1	1	1	1	1	1	1	1
	7	6	5	4	3	2	1
		21	15	10	6	3	1
			35	20	10	4	1
				35	15	5	1
					21	6	1
						7	1
							1

Theo bảng số trên ta có thể nêu lên ba quy tắc thiết lập nên bảng số: 1) Hàng thứ nhất có tám số 1; 2) Bắt đầu từ hàng thứ hai ở phía bên trái ít hơn hàng trên một con số; 3) ở mỗi hàng bắt đầu từ biên bên phải bằng 1, con số tiếp theo là tổng của con số ở bên phải với con số ở liền hàng trên (cùng cột). Ví dụ các con số ở hàng thứ hai là 2 = 1 + 1; 3 = 2 + 1; 4 = 3 + 1...5, 6, 7; còn ở hàng thứ ba là 1; 3 = 2 + 1; 6 = 3 + 3...

Khi quay bảng trên một góc 45^0 ta sẽ thu được một bảng tam giác tám hàng là "Tam giác Giả Hiến".

Cùng với phương pháp "Nâng dần luỹ thừa" còn có phương pháp "Khai căn dần dần" có thể giúp ta giải được các phương trình bậc cao.

Từ khoá: *Tam giác Giả Hiến và tam giác Pascal.*

37. Vì sao trong máy tính điện tử người ta xử lí thông tin dựa vào các số hệ đếm cơ số hai?

Hệ đếm thường dùng là hệ đếm cơ số 10, nếu $10^x = y$ thì ta có $\log_{10}y = x$, thế nhưng trong lí thuyết thông tin, các loại máy tính lớn nhỏ đều dùng các số ở hệ đếm cơ số hai.

ở Trung Quốc thời cổ đại, người ta đã dùng đài lửa (phong hoả đài) để làm công cụ truyền tin. Khi đốt lửa ở phong hoả đài là báo hiệu có kẻ địch xâm phạm. Nếu không có khói lửa là địch chưa đến. Đài lửa chỉ truyền đi hai loại tình huống "có" hoặc "không có". Đó là cách thông tin đơn giản người ta lấy đó làm đơn vị truyền tin và được gọi là "1 bit". Nếu dùng chữ số để mô tả ta có thể viết 0 (là không có khói) và 1 (có khói) là chỉ hai tình huống thông tin, theo định nghĩa công nghệ thông tin $\log_2 2 = 1$.

Giả thiết đài khói có hai ống khói: ống A để chỉ tình hình địch: có kẻ địch xâm phạm (1) hoặc kẻ địch chưa xâm phạm (0); ống B để chỉ tình hình ta: (1) cần tăng cường bố phòng, (0) chưa cần tăng cường bố phòng. Theo đó ta có bốn loại tình huống:

A	*B*	
(0	0)	Kẻ địch chưa đến không cần bố phòng.
(0	1)	Kẻ địch chưa đến, cần tăng cường bố phòng.
(1	0)	Kẻ địch xâm phạm, chưa có bố phòng.
(1	1)	Kẻ địch xâm phạm, cần tăng cường bố phòng.

Như vậy chúng ta đã thu nhận được lượng thông tin lớn hơn, hàm lượng thông tin là $\log_2 4 = 2$ bit.

Chúng ta cũng dễ tưởng tượng thấy nếu đài có ba ống khói thì ta có thể truyền đi 8 tình huống thông tin (0, 0, 0); (0, 0, 1); (0, 1, 0); (0, 1, 1); (1, 0, 0); (1, 0, 1); (1, 1, 0); (1, 1, 1) và hàm lượng thông tin là $\log_2 8 = 3$ bit.

Các tình huống thông tin phức tạp khác đều có thể chế biến từ cách truyền tin đơn giản như trên. Chính vì việc truyền tin chủ yếu chỉ có hai khả năng nên các máy tính thu nhận thông tin trên các số theo hệ đếm cơ số hai và thu được lượng thông tin cơ sở là 1. Và nếu khi thu nhận thông tin $y = 2^x$ thì khi biến đổi sẽ dùng $\log_2 y = x$ máy tính sẽ phản ánh chính xác lượng thông tin thực.

Từ khoá: *Lượng thông tin.*

38. Làm thế nào để đo được bề rộng một con sông lớn?



Làm cầu qua sông là một việc hết sức quan trọng trong ngành giao thông vận tải. Muốn làm cầu qua sông lớn phải biết chính xác bề rộng của con sông. Nhưng làm thế nào đo được bề rộng con sông một cách chính xác? Giả sử ta cần đo bề rộng của con sông từ điểm *A* đến điểm *B*. Trước hết ta chọn một điểm trên bờ, ví dụ điểm C cùng phía với điểm B và ba điểm *A, B, C* sẽ tạo nên một tam giác. Vì *B, C* cùng một phía trên bờ nên người ta có thể đo trực tiếp chiều dài của cạnh BC. Giả sử khi đo, ta được chiều dài cạnh BC = 521,12 m. Các góc *A* và góc *C* có thể đo được chính xác nhờ có toạ độ kinh vĩ và $\hat{A} = 45^o16'42''$ và $\hat{C} = 46^o43'12''$.

Trong tam giác *ABC*, ta biết chiều dài cạnh *BC* và các góc *A* và *C*.

Theo hệ thức lượng trong tam giác ta có:

$$\frac{\sin C}{AB} = \frac{\sin A}{BC} \text{ và } AB = \frac{\sin C}{\sin A} \times BC$$

$$AB = \frac{\sin 46^o43'12''}{\sin 45^o16'42''} \times 521,12$$

$$\oplus \frac{0,72861211}{0,71053343} \times 521,12$$

$$= 1,0246 \text{ x } 521,12 \oplus 533,94 \text{ m}$$

Vậy việc đo độ rộng của con sông lớn đã được đo rất chính xác.

Từ khoá: *Định lí trong tam giác.*

39. Làm thế nào để đo được chiều cao của Kim tự tháp?

Các bạn có biết các Kim tự tháp Ai Cập không? Kim tự tháp là các công trình kiến trúc hùng vĩ cổ Ai Cập, là các phần mộ của các quốc vương cổ ai cập.

Vào hơn 2600 năm trước có một quốc vương Ai Cập, muốn biết Kim tự tháp lớn có độ cao chính xác là bao nhiêu, thế nhưng không có ai biết được phải đo độ cao Kim tự tháp như thế nào.

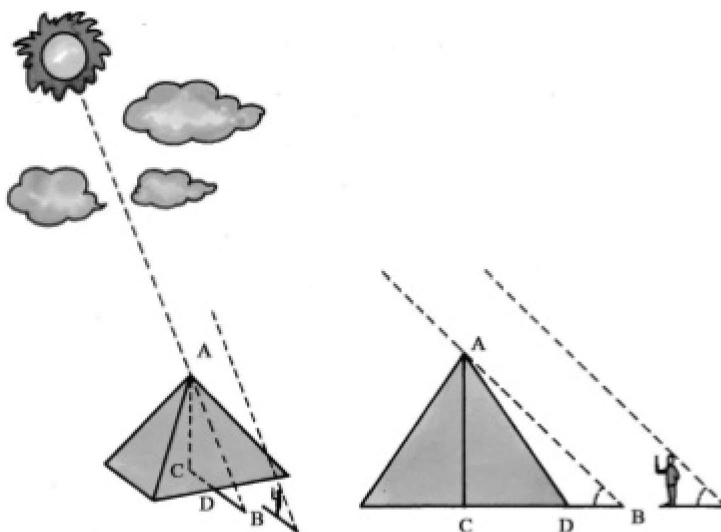
Cho người bò lên đỉnh tháp, không thể làm được. Bởi vì tháp có độ nghiêng nên cho dù có thể bò lên đến đỉnh thì đo bằng phương pháp nào?

Về sau vị quốc vương mời một học giả nổi tiếng là Fares để giải quyết vấn đề này. Fares đã chọn một ngày đẹp trời, với sự có mặt của quốc vương và các thày tư tế, Fares bắt đầu đo chiều cao của tháp.

Người xem rất đông đảo, náo nhiệt, người ta vừa xô đẩy vừa tranh luận. Thời giờ đã không còn sớm nữa, Mặt trời đã lên cao khiến cho bóng người và bóng tháp đã khá dài. Khi Fares đã biết thời điểm mà độ dài của bóng của chính mình bằng độ cao thực của mình, ông ra lệnh đo chiều dài của tháp. Bấy giờ các trợ thủ đã đo được chiều dài của bóng tháp có độ dài là *DB*. Nhờ vào *DB*, Fares đã đo được độ cao chính xác của tháp.

Bấy giờ mọi người mới hết sức thán phục về sự thông minh của Fares.

Fares quả là đáng nể vì từ hơn 2000 năm trước ông đã biết ứng dụng định lí hình đồng dạng để đo độ cao của Kim tự tháp. Còn môn hình học Oclid mà chúng ta học ngày nay được Oclid sáng lập sau Fares nhiều năm.



Thế Fares làm thế nào đo được chiều cao Kim tự tháp? Vì Fares chờ cho chính lúc bóng của mình đúng bằng chiều cao của mình mới bắt đầu đo chiều cao của tháp. Đó là thời điểm mà ánh sáng Mặt trời chiếu nghiêng đúng một góc bằng 45^0 xuống mặt đất.

Tức:

Góc CBA = 45^0

Góc ACB = 90^0

Góc BAC = 45^0

Vào thời điểm đó, đỉnh tháp, tâm của đáy tháp và điểm mút của bóng tháp tạo thành tam giác vuông cân và hai cạnh bên *AC* và *CB* phải bằng nhau *AC* = *CB*. Fares dễ dàng đo được độ dài của đáy tháp. Độ dài một nửa cạnh bên là CD và DB đã đo được; chiều cao của tháp sẽ bằng:

$$AC = CD + DB$$

Từ khoá: *Hình đồng dạng.*

40. Luyện tầm nhìn thiên lí - Dấn thêm một tầng lầu như thế nào?

Nhà thơ nổi tiếng thời Đường là Vương Chi Hoán, trong bài thơ “Lên lầu quán tước”[1] đã viết:

Mặt trời đà gác núi

Hoàng hà nhập biển khơi

Luyện tầm nhìn thiên lí

Dấn thêm một tầng lầu.

Trong bài thơ có nói "thiên lí" là cách nói khoa trương, ý nói là có tầm nhìn xa. Thế nhưng nếu bạn có hứng thú bạn thử tưởng tượng để có tầm nhìn thiên lí - tầm nhìn ngàn dặm (500 km) ta thử xem phải lên toà nhà có bao nhiêu tầng, cao bao nhiêu?

Theo như hình vẽ, giả sử $\overset{\frown}{AC}$ đại diện cho mặt đất, o là trung tâm Trái Đất, *C* là điểm cách A 500000 m, dĩ nhiên người đứng tại điểm *A* sẽ không nhìn thấy điểm *C*, mà muốn nhìn thấy điểm *C* thì bắt buộc phải từ điểm B ở xa mặt đất. Tia nhìn BC có liên quan chặt chẽ với cung *AC, AB* chính là tầng lầu có chiều cao thấp nhất mà đứng từ đó có thể quan sát thấy điểm *C.*

Vì *AB* = *OB* - *OA, OA* là bán kính Trái Đất và bằng 6370 km, nên để tính AB ta chỉ cần tính OB.

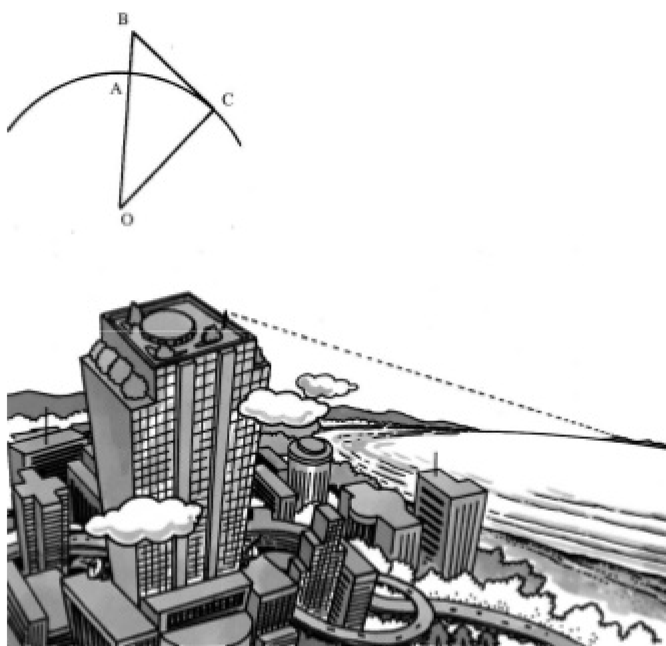
Trong tam giác vuông OCB

$$\hat{O} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{OC} \times 180^o = \frac{500.000}{6370.000} \times \frac{180^o}{\pi} = 4,5^o$$

$$OB = \frac{OC}{\cos\hat{O}} = \frac{6370}{\cos 4,5^o} = 6.390.000$$

Và

AB = *OB* - *OA* = 6390 km - 6370 km = 20 km



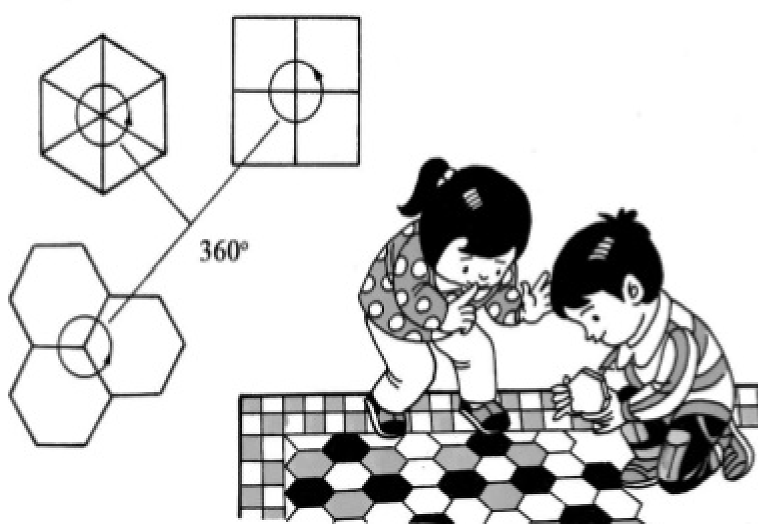
Từ các tính toán cho thấy ít nhất thì toà lâu đài cũng cao đến 20 km, cao hơn đỉnh núi cao

nhất thế giới là đỉnh Chômôlungma (tức đỉnh Evrest) nhiều. Tầng lầu cao đến như vậy quả là chưa từng có.

Từ khoá: *Tầm nhìn thiên lí.*

Gạch hoa lát nhà có nhiều loại nhưng nói chung đều có dạng hình vuông hoặc hình lục giác. Tại sao vậy?

Trong các hình phẳng nhiều cạnh đều chỉ có ba loại hình có thể lắp kín một mặt phẳng không có khe hở là các hình tam giác, hình vuông và hình lục giác. Với hình tam giác đều có ba góc đều bằng 60^{0}, khi ghép sáu hình tam giác đều lại với nhau ta sẽ có một đỉnh chung là 360^{0}. Hình vuông có mỗi góc là 90^{0}, ghép bốn hình vuông với nhau, ta cũng có một đỉnh chung là 360^{0}. Với hình lục giác có các góc là 120^{0}, khi ghép ba lục giác lại với nhau ta cũng thu được một hình có đỉnh chung là 360^{0}.



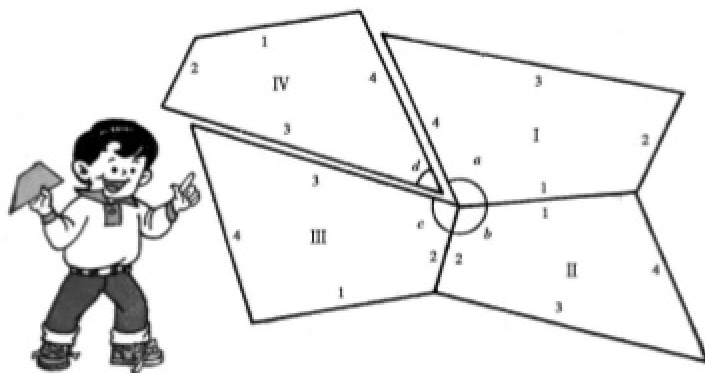
Nếu dùng các hình nhiều cạnh đều khác thì không đạt được yêu cầu đó. Ví dụ nếu dùng hình ngũ giác đều chẳng hạn. Mỗi góc của hình ngũ giác đều là 180^{0}. Nếu ghép ba ngũ giác lại với nhau, ta sẽ có đỉnh chung là 324^{0}, nhỏ hơn 360^{0} nên có khe hở. Nếu dùng bốn hình ngũ giác ghép lại với nhau thì có góc chung là 108^{0} x 4 = 432^{0} lớn hơn 360^{0}.

Ghép các hình tam giác đều với nhau tuy không có khe hở nhưng gạch hoa có hình tam giác thì trông không đẹp bằng hình vuông hoặc hình lục giác đều. Nên trong nghệ thuật thiết kế người ta hay dùng các hình vuông hoặc hình lục giác.

Từ khoá: *Hình vuông, hình tam giác đều, hình lục giác đều.*

Chúng ta sau khi đã học xong một định lí toán học, thì nên chú ý liên hệ chúng với thực tiễn cuộc sống, sản xuất. Hãy xem xét một ví dụ sau.

Trong một nhà máy có một đống phế liệu, trong đó có nhiều tấm gỗ hình 4 cạnh, các tấm gỗ phế liệu này có kích thước hoàn toàn giống nhau dù hình dáng có khác nhau: có tấm hình vuông, có tấm chữ nhật, đều là các hình 4 cạnh khác nhau. Nếu đem chúng xử lí và chế tác thành những hình có quy củ thì sẽ cắt bỏ nhiều mảnh nhỏ vụn, lãng phí gỗ. Nhiều người đã tính toán tìm cách tận dụng thật tốt phế liệu.



Sau này có người dùng các gỗ phế liệu này để phủ sàn nhà, nhờ vậy bất kể các tấm lớn nhỏ đều có thể tận dụng làm ván sàn, chỉ cần gia công hai đầu chút ít là được.

Tại sao vậy? Vì tổng các góc trong của các tứ giác đều là 360^0. Theo các lí do như trên ta có thể cắt để lắp kín mặt bằng không có khe hở. Theo cách này, ta có thể chế tác các tấm gỗ thành băng dài, đương nhiên cũng có thể ghép chúng thành mảng có kích thước lớn.

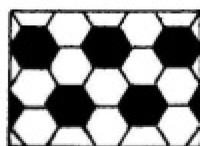
Nhờ vậy có thể sử dụng các tấm gỗ hình bốn cạnh bất kì ghép thành tấm phủ mặt đất.

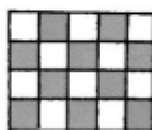
Dùng máy tính điện tử người ta có thể tìm được nhiều phương án lắp ghép trước nay chưa từng có.

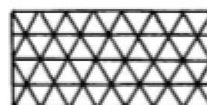
Từ khoá: *Hình nhiều cạnh.*

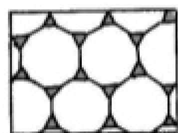
Bạn có chú ý trong đời sống hàng ngày có bao nhiêu loại hình khảm, đó là các mảnh hình khảm ghép lại với nhau mà thành.

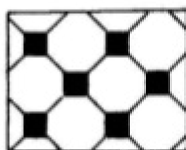
Yêu cầu của các hình khảm là khi các đường chu vi gặp nhau tổng các góc phải bằng 3600, nhờ vậy khi ghép chúng lại sẽ không có khe hở. Nếu dùng các mảnh khảm gồm các hình nhiều cạnh thì có bao nhiêu cách lắp ghép?

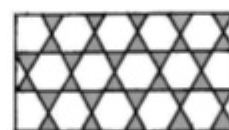

Hình 1

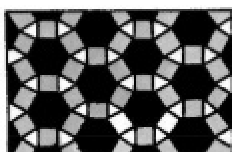

Hình 2

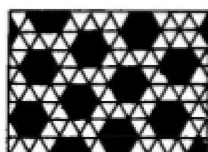

Hình 3

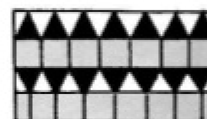

Hình 4

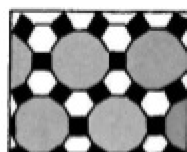

Hình 5

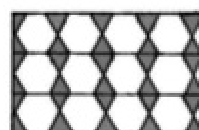

Hình 6

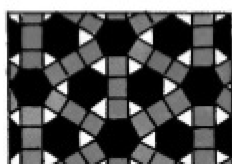

Hình 7

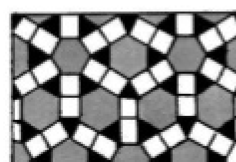

Hình 8

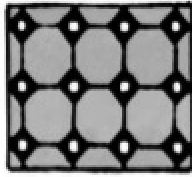

Hình 9


Hình 10

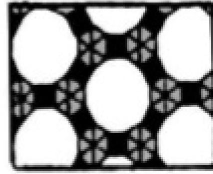

Hình 11


Hình 12

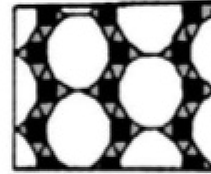

Hình 13



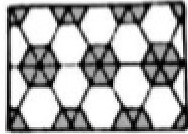
Hình 14



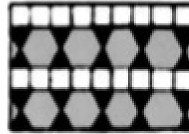
Hình 15



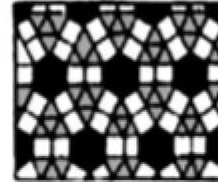
Hình 16



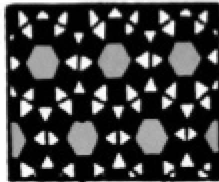
Hình 17



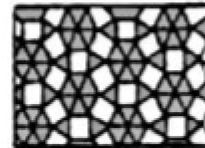
Hình 18



Hình 19



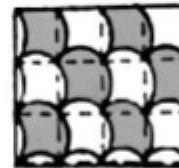
Hình 20



Hình 21



Hình 22



Hình 23

Trước hết xem xét từ khía cạnh các điểm gặp nhau của các hình có nhiều cạnh. Do các góc trong của các đa giác nhỏ nhất là 60^o, lớn nhất là 180^o nên chỉ có các hình 3, 4, 5, 6 cạnh là có thể sử dụng. Ta thử xét ba tình huống. Ta gọi các hình đa giác có các số cạnh là *x, y, z* thì các góc trong sẽ là:

$$\frac{(x-2)180^o}{x};\frac{(y-2)180^o}{y};\frac{(z-2)180^o}{z}$$

Khi ghép chúng lại với nhau để khảm thì

$$\frac{(x-2)180^o}{x}+\frac{(y-2)180^o}{y}+\frac{(z-2)180^o}{z}=360^o$$

Bởi vì $^1/_x + {}^1/_y + {}^1/_z = {}^1/_2$

Không kể trật tự sắp xếp của các số x, y, z thì phương trình này có 10 nhóm nghiệm là:

(3, 7, 42); (3, 8, 24); (3, 9, 18); (3, 10, 15); (3, 12, 12); (4, 5, 20); (4, 6, 12); (4, 8, 8); (5, 5, 10); (6, 6, 6).

Cũng với lí luận tương tự khi chọn phương án bốn loại đa giác ta có bốn nhóm nghiệm: (3, 3, 4, 12); (3, 3, 6, 6); (3, 4, 4, 6); (4, 4, 4, 4). Với phương án năm loại đa giác sẽ có hai nhóm nghiệm (3, 3, 3, 3, 6) và (3, 3, 3, 4, 4), còn nếu dùng sáu loại đa giác thì chỉ có một nhóm nghiệm (3, 3, 3, 3, 3, 3).

Như vậy nếu xét theo quan điểm, điểm giao nhau của các đa giác đều có 17 loại cách phối trí khác nhau. Thế nhưng có phải cả 17 phương án này đều có thể sử dụng trong kĩ thuật nạm khảm. Thực tế chỉ có các đa giác đều có 3, 4, 6, 8, 12 cạnh là có thể ghép nối vào nhau để khảm làm 11 loại khảm ghép để lấp kín bề mặt mà không có khe hở, còn sáu loại đa giác khác chưa tìm được cách ghép thành công.

Thế thì từ 11 loại tình huống có thể có cách sắp xếp nào? Chúng ta có thể bàn đến bốn loại sắp xếp chính:

1. Các hình khảm đều: Tức là dùng cách lắp ghép các đa giác cùng loại như ở các hình vẽ 1 - 3. Chỉ có 3 loại lắp ghép (6, 6, 6); (4, 4, 4, 4) và (3, 3, 3, 3, 3).

2. Các hình khảm nửa đều: Dùng cách lắp ghép các hình đa giác không đồng nhất nhưng số điểm giao nhau của đường biên các đa giác đều giống nhau như ở các hình vẽ từ 4 - 9. Có 6 loại (3, 12, 12); (4, 8, 8); (3, 3, 6, 6); (3, 4, 4, 6); (3, 3, 3, 6) và (3, 3, 3, 4, 4).

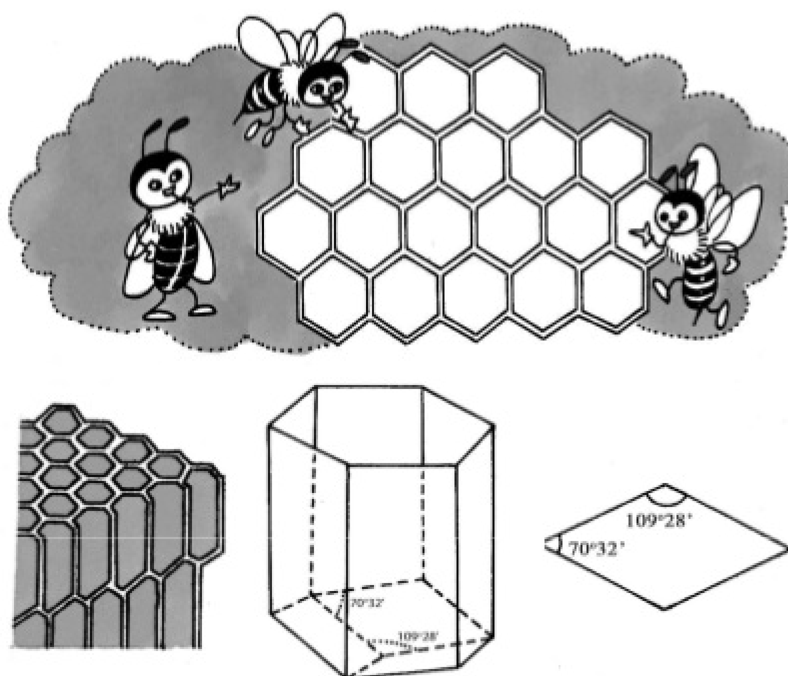
3. Các hình khảm đều đặn: Số giao điểm của các đường biên các đa giác là giống nhau, chỉ có thứ tự sắp xếp khác nhau như ở các hình vẽ 10 - 13. Loại khảm này dựa vào giao điểm các đường biên của các đa giác theo một thứ tự nhất định, nhưng vị trí tương đối của các giao điểm là vô hạn. Ví dụ nếu dịch chuyển ô giữa của hình 11 sang bên phải một ô ta sẽ có một loại đồ hình khảm khác. Nếu cách 1, 2, 3... hàng di chuyển sang phải một ô sẽ được một hình khảm khác. Vì vậy ở hình khảm này ta sẽ thu được nhiều loại.

4. Các hình khảm không đều đặn: Các giao điểm của các đường biên của các đa giác không giống nhau, số giao điểm cũng không giống nhau. Các hình khảm này cũng có vô số loại.

Ngoài các phương án kể trên người ta có thể sử dụng các hình tam giác, hình bốn cạnh không đều hoặc các đường gấp khúc, cũng nhận được các hình khảm tinh xảo.

Từ khoá: *Hình khảm; Hình đa giác đều.*

Nếu quan sát kĩ các tổ ong, bạn sẽ thấy có nhiều điều đáng kinh ngạc. Kết cấu của tổ ong quả là kì tích trong tự nhiên. Các tổ ong ở do nhiều tấm vách ngăn có độ lớn nhỏ giống nhau tạo thành, nhưng nhìn từ chính diện chúng đều là hình sáu cạnh, sắp xếp đều đặn. Nhưng nếu nhìn nghiêng thì đó là các hình lăng trụ lục giác sắp xếp khít nhau. Nhưng đáy của các lăng trụ lại làm cho người ta kinh ngạc hơn! Các đáy không bằng cũng không phải là mặt hình tròn, cũng không nhọn mà là do ba hình thoi hoàn toàn đồng nhất ghép lại thành một đáy nhọn.



Dạng lục giác kì diệu của các tổ ong gợi sự chú ý của nhiều người. Tại sao các vách ngăn của tổ ong tạo thành hình lục giác mà không tạo thành hình tam giác, hình vuông, hình ngũ giác.

Vì các vật thể hình lăng trụ khi chịu áp lực bốn bên: trái, phải, trước, sau tiết diện sẽ biến thành hình lục giác đều. Vì vậy theo quan điểm lực học, hình lục giác là hình có tính ổn định cao nhất. Thế khi ong xây tổ có phải chúng đã bị loại sức ép như vậy tác động? Đương nhiên không phải như vậy.

Hình lục giác của tổ ong ngay từ đầu đã liền phiến như vậy.

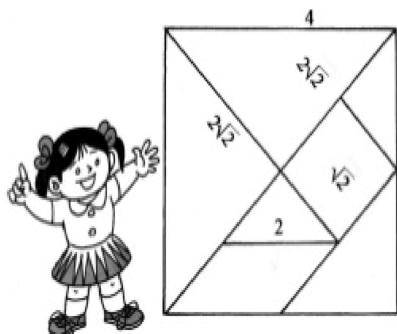
Vào thế kỉ XVIII, một học giả người Pháp là Moralti đã tiến hành đo đạc cẩn thận các góc trong tổ ong và phát hiện ra một quy luật lí thú: Các hình thoi ở mặt đáy của tổ ong có góc tù là $109^{o}28'$ còn góc nhọn là $70^{o}32'$. Hiện tượng này gợi ý cho nhà vật lí Reaumur liệu đó có phải là giải pháp xây tổ ong cho phép tiết kiệm nguyên liệu nhất mà dung tích chỗ ở lại lớn nhất? Do đó ông đã trao đổi ý kiến với nhà toán học Thuỵ sĩ là Koenig. Qua tính toán cẩn thận, Koenig đã khẳng định các phán đoán của Reaumur. Thế nhưng theo các tính toán chính xác của Koenig thì các góc của hình thoi phải là $109^{o}26'$ và $70^{o}34'$, so với các số liệu đo đạc ở tổ ong thời đó thì sai khác hai phút.

Vào năm 1743, nhà toán học Anh là Maclaurin lại nghiên cứu cấu trúc tổ ong. Ông đã dùng một phương pháp mới tính toán và đi đến kết luận là các góc trong tổ ong hoàn toàn phù hợp với các kết quả tính toán. Nguyên do của sai lệch đã nêu trên là do Koenig đã dùng một bảng số in sai.

Qua mấy thế kỉ nghiên cứu cấu trúc tổ ong, cuối cùng người ta tìm thấy là chính cấu trúc tổ ong hữu hiệu nhất về mặt tiết kiệm nguyên liệu và không gian. Ngoài ra người ta còn tìm thấy loại cấu trúc này còn có nhiều tính năng kì diệu khác. Ngày nay kiểu cấu trúc tổ ong được ứng dụng nhiều trong kiến trúc, trong hàng không và vô tuyến điện thoại. Các kết cấu "tầng tổ ong" có lợi về mặt cách nhiệt, cách âm trong kiến trúc, cũng như trong thiết kế các ống thoát khí cho các động cơ hàng không.

Từ khoá: *Kết cấu tổ ong; Hình lục giác; Lăng trụ lục giác đều.*

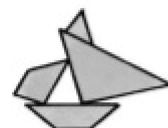
Bàn thất xảo là loại bàn dã chiến lắp ghép từ năm hình tam giác (hai hình lớn, hai hình nhỏ, một hình kích thước trung bình), một hình bình hành, một hình vuông, tất cả là bảy tấm ghép, ghép lại mà thành. Như ở hình 7 tấm ghép đã ghép nối lại thành một hình vuông. Giả sử chúng ta chọn để bàn hình vuông được ghép lại có cạnh bằng bốn, chúng ta có thể tính toán kích thước của mỗi mảnh ghép. Bảng mảnh ghép sẽ có 5 x 3 + 4 + 4 = 23 đường biên. Độ dài của mỗi đường biên sẽ có 4 loại: 2, 4,√2 và 2√2 . Vả lại 2√2 và 4 là gấp đôi của √2 và 2 nên chiều dài của các mảnh ghép của bàn thất xảo thực tế chỉ có hai loại. Chính vì vậy từ các mảnh dễ dàng lắp ghép thành các loại bàn có hình dạng khác nhau.



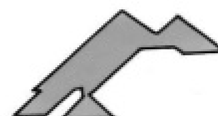
Loại bàn thất xảo đã xuất hiện ở Trung Quốc hơn ngàn năm trước, vào thời đó bàn thất xảo mang tên là “Kỉ yến” bàn tiệc, là một loại bàn chân thấp sử dụng khi bày các bàn tiệc. Điều lí thú là mỗi chiếc bàn lắp ghép theo các quy cách khác nhau sẽ có kích thước nhất định chọn trước, tháo rời ra lại có thể sử dụng riêng biệt. Khi có đông khách, tuỳ theo nhu cầu có thể làm mặt bàn ghép lại kích thước to hơn, mặt bàn có thể biến đổi nhanh chóng. Vì vậy được mọi người ưa thích. Vào thời Tống loại bàn tiệc chỉ có sáu mảnh, sau này mới thêm một mảnh nữa thành bảy.



Bàn thất xảo có từ các buổi yến tiệc, sau này lan truyền ra nước ngoài và được gọi là “bàn Nhà Đường”. Bàn thất xảo được lưu truyền cho đến ngày nay vì chỉ với bảy mảnh gỗ có thể sắp xếp thành nhiều kiểu mặt bàn khác nhau, hơn nữa với cùng một kiểu mặt bàn lại có thể được lắp ghép theo nhiều cách khác nhau.

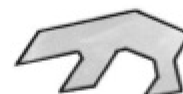


Thế nhưng diện tích lớn nhất của bàn thất xảo có thể thu được là bao nhiêu? Ta thử tính xem. Hai tam giác nhỏ, mỗi hình chỉ có diện tích bằng 1. Diện tích hình tam giác trung bình, diện tích hình bình hành và diện tích hình vuông do hai tam giác nhỏ ghép lại, diện tích của chúng là 2. Hai hình tam giác lớn có diện tích bằng 4. Hình tam giác lớn có thể do hai hình tam giác nhỏ ghép với hình bình hành; cũng có thể do hai tam giác nhỏ và hình vuông ghép lại, lại cũng có thể do hai tam giác nhỏ ghép với tam giác trung bình. Diện tích của bảy mảnh ghép sẽ là:

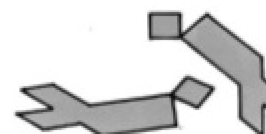


1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 + 4 = 16, đó cũng chính là diện tích lớn nhất mà bàn thất xảo cho phép lắp ghép được.

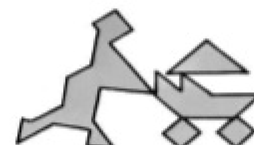
Bạn hãy thử xem với bàn thất xảo bạn có thể thu được bao nhiêu kiểu mặt bàn?



Từ khoá: *Bàn thất xảo.*



Ngôi sao năm cánh là loại hình vẽ mà mọi người khá quen thuộc. Thế nhưng bạn có biết cách vẽ chính xác một ngôi sao năm cánh? Dưới đây chúng tôi xin giới thiệu một phương pháp vẽ ngôi sao năm cánh chính xác.



1. Vẽ một vòng tròn tâm O.

2. Vẽ hai đường kính của vòng tròn *AZ* và *XY* vuông góc với nhau.

3. Chọn *M* là điểm giữa của *OY*.

4. Lấy *M* làm tâm, *MA* làm bán kính, vẽ cung tròn *AN*, cung tròn cắt *OX* tại điểm *N*.

5. Lấy A làm tâm, MA làm bán kính cắt trên vòng tròn các cung tròn liên tiếp bằng nhau: *AB = BC = CD = DE = EA*.

6. Nối liên tiếp các đỉnh *AD, AC, EB, EC, BD,* ta đã vẽ xong ngôi sao năm cánh.

Dưới đây ta sẽ chứng minh tính chính xác của cách vẽ vừa trình bày. Cho vòng tròn có bán kính R. Từ cách vẽ trên đây ra thấy:

$$AN^2 = AO^2 + ON^2 = AO^2 + (AM - OM)^2$$

Vì vậy

$$AN = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}R - \frac{R}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}R$$

Nếu quả hình ngôi sao vừa vẽ là chính xác thì năm đỉnh của ngôi sao phải nội tiếp trong vòng tròn bán kính R. Nói khác đi, ta phải chứng minh AN chính bằng độ dài cạnh của ngũ giác đều nội tiếp trong bán kính vòng tròn ngoại tiếp của ngôi sao năm cánh.

Theo các kiến thức đã học ở bậc trung học, ta biết cạnh của hình thập giác đều nội tiếp trong hình tròn bán kính R sẽ bằng

$a_{10} = {}^1/_2 (\sqrt{5} - 1)R$

a_{10} là độ dài cạnh của thập giác đều nội tiếp trong vòng tròn bán kính R.

Dưới đây ta sẽ tính cạnh của ngũ giác đều nội tiếp trong vòng tròn bán kính R. Giả sử $DZ = ZC = a_{10}$ là cạnh của thập giác đều nội tiếp còn $DC = a_5$ là cạnh của ngũ giác đều nội tiếp.

Tam giác cân *ODZ* có diện tích

$$S_{\Delta ODZ} = \frac{1}{8}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}R^2$$

Mà $$S_{\Delta ODZ} = \frac{1}{2} DH.\ OZ$$

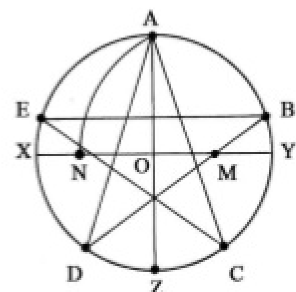
$$DH = 2S_{\Delta ODZ}: R = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}R$$

Vì vậy

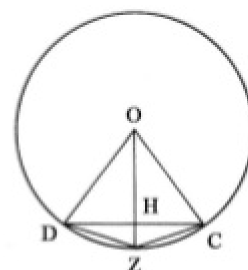
$$a_5 = 2DH = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}R$$

Rõ ràng là AN = a_5. Vì vậy phương pháp ta vẽ ngôi sao năm cánh trình bày ở trên là chính xác.

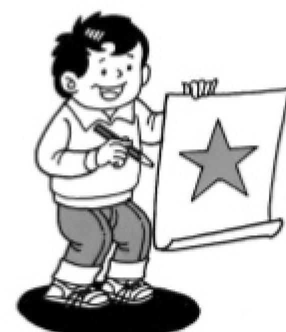
Không phải bất kì đa giác đều nào nội tiếp trong vòng tròn đều có thể vẽ được bằng thước và compa. Các hình tam giác đều, ngũ giác đều, thập giác đều cũng như các đa giác đều có nguồn gốc trực tiếp từ chúng như các hình có số cạnh 2*n*, 2*n* x 3, 2*n* x 5, 2*n* x 15 (*n* là số dương) là những đa giác đều mà từ hơn 2000 năm về trước vào thời đại Oclit người ta đã biết. Từ đó rất nhiều năm sau chưa hề có bước đột phá nào, mãi đến thế kỉ XVIII Gauss mới lần đầu tiên tìm ra cách vẽ đa giác 17 cạnh. Có thể phán đoán: một đa giác đều n cạnh thì $n = 2^m. P1. P2...P$ mới có thể vẽ được bằng thước và compa. Trong đó *P1, P2...P* là các số $2^{2^k}+1$, *m* là số dương bất kì hoặc bằng 0. Lời dự đoán trên đây do Gauss đưa ra và đã cùng chứng minh với một nhà toán học khác.



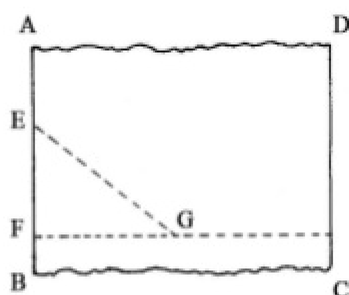
Từ khoá: *Hình nhiều cạnh.*



Giả sử có mảnh ván hình chữ nhật, hình chữ nhật này có hai cạnh song song đã hoàn hảo, hai cạnh đối diện còn lại lại nham nhở, làm thế nào bạn có thể tạo được một hình chữ nhật hoàn chỉnh. Để tạo hình chữ nhật, ta phải cắt đường biên nham nhở theo một đường vuông góc với hai cạnh song song, nhưng lại không có êke. Vậy làm thế nào để vẽ đường thẳng vuông góc với hai đường kia. Ta hãy lấy một chiếc thước có chia độ. Trước hết ta chọn trên đường biên *AB* một đoạn *EF* bằng 30 mm như ở hình vẽ. Sau đó dùng *E* và *F* làm tâm vẽ hai cung tròn một cung là thuộc đường có tâm tại E bán kính 50 mm và một cung thuộc vòng tròn tâm F bán kính 40 mm. Hai cung tròn sẽ cắt nhau tại điểm *G*. Nối *FG*, góc EFG = 90^o. Cắt bỏ phần mảnh gỗ ở phía dưới FG ta sẽ có một đường biên hoàn chỉnh của hình chữ nhật. Dùng phương pháp tương tự ta sẽ có được đường biên phía trên hoàn chỉnh.



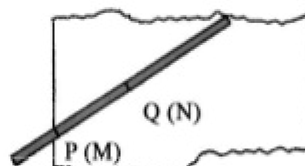
Thế tại sao ta khẳng định EFG =90^o. Bởi vì tỉ số các cạnh *EF : FG : EC = 3 : 4: 5* đây là tam giác đồng dạng với tam giác vuông có ba cạnh 3, 4, 5 trong cạnh dài *EG* đối diện với góc vuông *EFG*.



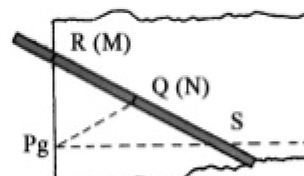
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

Bây giờ nếu thước chia độ cũng không có thì ta sẽ làm thế nào?

Chúng ta sẽ chọn một thanh gỗ tương đối thẳng, dùng bút chì đánh dấu hai điểm *M, N* trên thanh gỗ (như hình vẽ). Sau đó đặt thanh gỗ trên tấm gỗ, đặt điểm M ở mép tấm gỗ. Dùng bút chì đánh dấu hai điểm *P* và *Q* ngay ở các vị trí *M* và *N* trên tấm gỗ.

Sau đó thay đổi phương của thanh gỗ. Giữ cho điểm *N* bất động. Cho điểm *M* di động trên biên của tấm gỗ. Dưới điểm *M* ta đánh dấu điểm *R*. Kéo dài *RQ*, trên phần kéo dài ta đặt *QS* = *MN*. Nối *PS*, góc RPS =90^{0}. Dùng phương pháp đơn giản như vừa mô tả ta vẽ được đường vuông góc, cắt tấm gỗ theo đường vuông góc vừa vẽ, ta sẽ có một cạnh hình chữ nhật.

Để chứng minh RPS là góc vuông, ta nối *PQ*. Vì *RQ* = *PQ* = *QS* nên các tam giác *RQP* và *SQP* là những tam giác cân. Do đó:

RPS = RPQ + QPS =PRQ + QSP

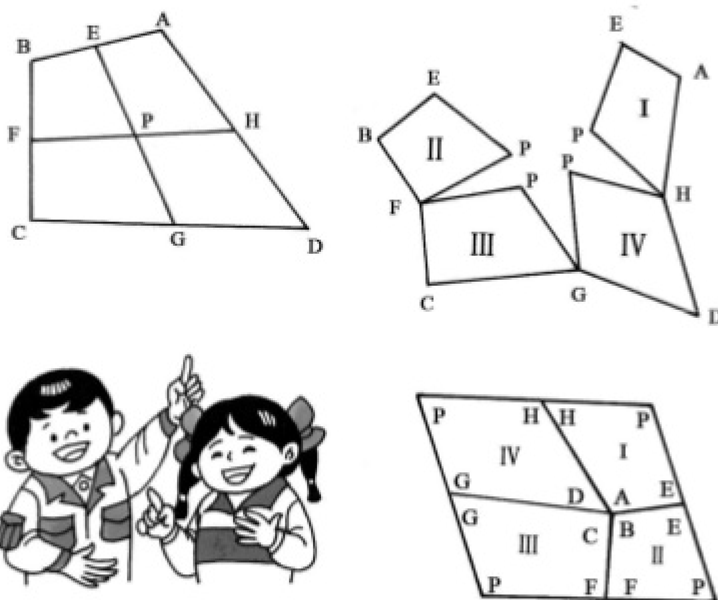
Vì các góc RPS,PRS,RSP là các góc trong của tam giác RPS, tổng của chúng là 180^{0}, vì vậy góc = 90^{0}.

Về vấn đề này nhà toán học Trung Quốc Hoa La Canh đã từng bàn đến. Điều này hoàn toàn hiển nhiên đối với hình vuông hoặc hình chữ nhật. Nhưng đối với một tứ giác bất kì thì liệu điều đó có chính xác không?

Xét một tứ giác *ABCD* bất kì, các đoạn nối các điểm giữa các cạnh là *EG* và *FH* cắt nhau tại *P, P* sẽ là trung điểm của *EG* và *FH*. Ta hãy tưởng tượng có 4 quả cầu nhỏ đặt tại các đỉnh A, B, C, D, mỗi quả cầu cho 1 lực tác dụng là 10N (N: đơn vị đo lực, đọc là niutơn). Hợp lực của hai quả cầu đặt tại A, B sẽ cho hợp lực tác dụng tại điểm *E*, hợp lực tác dụng khoảng trên dưới 20 N; các quả cầu nhỏ *C, D* cho hợp lực đặt tại điểm G có giá trị gần 20 N. Như vậy bốn quả cầu sẽ cho hợp lực đặt tại trung điểm của EG là đường nối các trung điểm với hợp lực gần 40 N. Cùng lí do tương tự, bốn quả

cầu cũng cho hợp lực tác dụng tại trung điểm của *FH* gần 40 N. Như vậy bốn quả cầu sẽ cho hợp lực tác dụng tại trung điểm của EG và FH là điểm duy nhất và điểm P là trung điểm của *EG* và *FH*.

Lại giả sử ta dùng kéo cắt tứ giác theo các đường *EG, FH* thành bốn mảnh và lấy các điểm *H, G, F* làm bản lề, kéo căng các mảnh để AH trùng với *DH* và *DG* trùng với *CG*. Do tổng bốn góc trong của tứ giác là 360⁰, nên $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360^{\circ}$. Lúc cạnh *AE* của mảnh I trùng với cạnh BE của mảnh thứ II, dễ thấy là lúc bấy giờ ta lại nhận một hình tứ giác mới là một hình bình hành, mà các cạnh đối từng đôi bằng tổng của *EG + FH*, và bốn góc trong là các góc kề bù nhau. Diện tích hình bình hành mới này rõ ràng bằng diện tích của hình tứ giác cũ nên:



$$S = EG\times FH\times \sin\widehat{HPG}\ ''\ EG\times FH$$

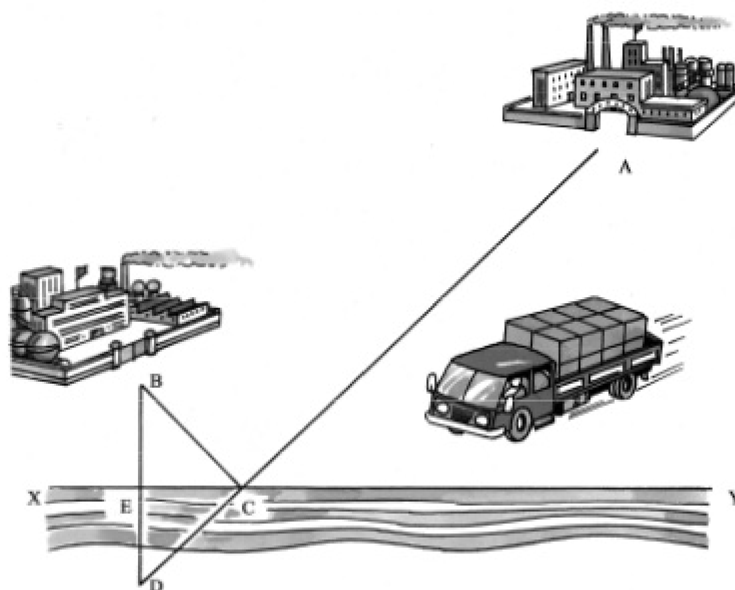
Trong biểu thức ở trên dấu = chỉ xuất hiện khi

$$\sin\widehat{HPG} = 1 \text{ tức } EG\perp FH$$

Vì vậy tích của hai đường nối các trung điểm rõ ràng lớn hơn diện tích của tứ giác.

Từ khoá: *Hình tứ giác và diện tích.*

Ở một khu xây dựng mới có hai nhà máy lớn, vị trí các nhà máy như biểu diễn trên hình vẽ, đặt tại hai điểm A và B. Sản phẩm của các nhà máy phải được vận chuyển đến bờ sông, trên hình vẽ được biểu diễn bằng đường thẳng XY, sau đó đưa lên thuyền và vận chuyển đi nơi khác. Hiện tại người ta chuẩn bị xây dựng trên bờ sông một bến phà, sau đó xây dựng hai con đường từ các nhà máy đến bến phà. Địa điểm của bến phà phải được chọn thế nào để chi phí xây dựng là ít tốn kém nhất?



Vì chi phí xây dựng con đường liên quan trực tiếp đến độ dài của con đường. Để chi phí xây dựng con đường ít tốn kém nhất thì phải chọn để tổng chiều dài của hai con đường ngắn nhất. Như vậy vấn đề đặt ra cho toán học giải quyết là phải chọn một điểm *C* thế nào cho *AC* + *BC* là ngắn nhất.

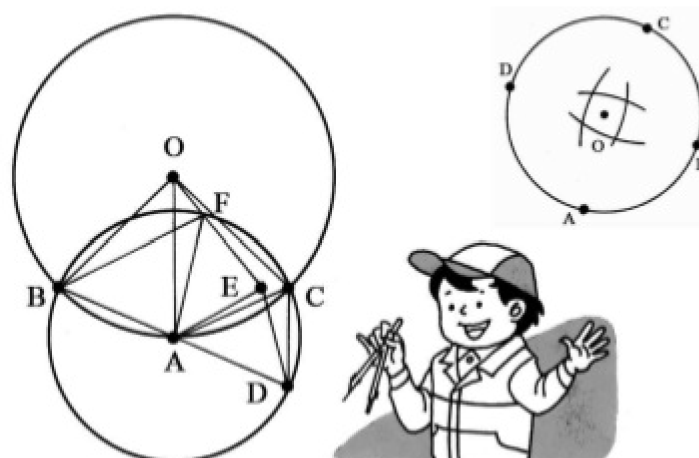
Bây giờ ta sẽ dùng các tri thức toán học để giải quyết vấn đề này. Trước hết từ điểm *B* ta vẽ đường vuông góc với đường thẳng *XY*, gặp *XY* tại *E*. Kéo dài BE một đoạn *ED* = *BE*. Nối *AD, AD* sẽ cắt *XY* tại điểm *C*. Dưới đây ta sẽ chứng minh *AC* + *BC* là ngắn nhất. Vì B và D đối xứng với nhau qua *XY*, nên khoảng cách từ *B* và *D* đến bất kì điểm nào trên XY cũng bằng nhau (vì *XY* là đường trung trực của *BD*). Vì vậy tổng chiều dài của điểm A đến một điểm trên XY và từ điểm đó đến điểm *B* cũng bằng tổng chiều dài từ điểm *A* đến XY rồi đến *D*. Nói cách khác là *AC* + *BC* = *AD* là khoảng cách ngắn nhất từ *A* đến rồi đến *B*.

Vì vậy với nhiều vấn đề thực tế nếu chịu khó suy nghĩ, ta có thể vận dụng toán học để giải quyết được.

Trước đây chúng ta đã bàn về việc dùng thước và compa để vẽ hình. Có lúc người ta có thể dùng compa để vẽ hình cũng chính xác không kém khi dùng thước. Việc chỉ sử dụng compa để vẽ hình được thực hiện như thế nào? Đó là vấn đề chỉ dùng compa để vẽ hình. Trong đó vấn đề tìm tâm vòng tròn chỉ dùng compa là một vấn đề khá nổi tiếng.

Cách vẽ tiến hành như sau:

Trước hết ta chọn trên vòng tròn một điểm *A*. Lấy *A* làm tâm vẽ một vòng tròn cắt vòng tròn đã cho tại hai điểm *B* và *C*. Lấy *B* làm tâm và *AB* làm bán kính vẽ vòng tròn thứ ba, cắt *AB* tại điểm thứ ba *D*. Lấy *A, D* làm tâm, lấy *CD* làm bán kính vẽ hai cung tròn, hai cung tròn cắt nhau tại *E*. Lại lấy *E* làm tâm, *EA* làm bán kính vẽ cung tròn cắt vòng tròn *A* tại *F*. Lại lấy *A, B* làm tâm và *FB* làm bán kính vẽ hai cung tròn cắt nhau tại *O*, đó là tâm của vòng tròn cần tìm.



Thế tại sao với cách vẽ như vậy ta lại nhận được tâm vòng tròn? Vì qua ba điểm *A, B, C* không thẳng hàng chỉ có vòng tròn duy nhất, để chứng minh O là tâm của vòng tròn ta cần chứng minh *OA = OB = OC*. Ta đã biết *OB = OA* (theo cách vẽ) ta chỉ cần chứng minh hoặc *OB = OC* (hoặc *OA = OC*) là đủ.

Do *AD = AF, AE = DE = EF* nên hai tam giác *AED* và *AEF* bằng nhau, . Vì 3 điểm D, A, B nằm trên một đường thẳng nên các góc DAF = AFB + ABF, EAD = AFB, EDA = ABF nên tam giác EAD đồng dạng với tam giác *AFB* và *AD:BF = EA:EF.*

Mặt khác *BF = OB, EA = DC, AF = AB* nên *AD:OB = DC:AB*, tam giác *ABC* và tam giác *OAB* là hai tam giác đồng dạng và . Vì vậy *DC // AO*.

OAC = ACD = ADC = OAB

Mà OAB = OAC, AB = AC

vậy

∆OAB = ∆OAC và OB = OC.

Đó là điều phải chứng minh.

Trong thực tế người ta có thể dùng một phương pháp khá đơn giản gần giống với phương pháp đã mô tả. Trước hết ta chọn bốn điểm trên vòng tròn cách đều nhau. Lấy các điểm đã chọn làm tâm, chọn một bán kính thích hợp vẽ bốn cung tròn cắt nhau thành một hình bốn cạnh cong. Có thể điều chỉnh bán kính của các vòng tròn để các cung tròn tạo thành tứ giác cong nhỏ. Sau đó ta chọn bên trong tứ giác cong một điểm *O*, lấy *O* làm tâm vẽ vòng tròn bán kính *OA* xem vòng tròn có trùng với vòng tròn đã cho hay không. Nếu không trùng người ta lại điều chỉnh cho trùng, bằng cách đó người ta có thể nhanh chóng xác định được tâm vòng tròn.

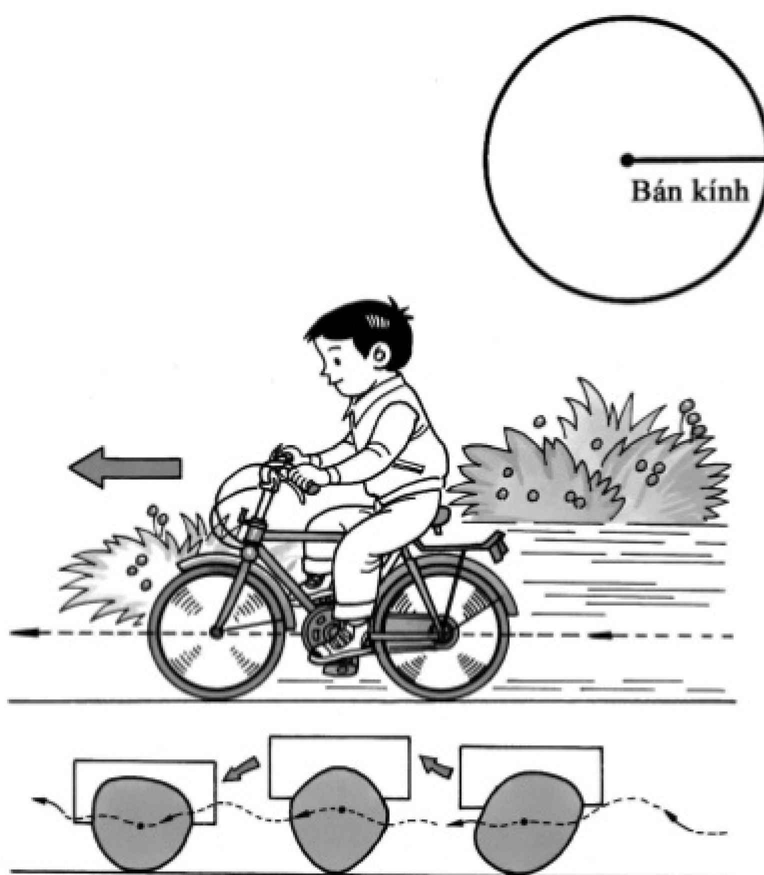
Từ khoá: *Vòng tròn; Tâm vòng tròn.*

61. Vì sao bánh xe lại phải là hình tròn?

Vì sao bánh xe lại có dạng hình tròn? Đây không chỉ đơn giản là để xe chạy bon bon trên đường được dễ dàng. Dĩ nhiên là chưa hề ai thấy một chiếc xe lại có thể chạy với bánh xe hình tam giác.

Nói như thế quả là không sai, nhưng chưa đủ để thuyết phục, vì đó chỉ là nói theo cảm giác kinh nghiệm của chúng ta mà chưa đứng trên tính chất của vòng tròn mà xem xét.

Thế vòng tròn có tính chất gì? Ta xét xem hình tròn vẽ ở trên. Để vẽ vòng tròn ta dùng compa quay quanh tâm điểm gọi là tâm vòng tròn. Bất kì điểm nào trên vòng tròn đều cách tâm vòng tròn một độ dài không đổi, là bán kính vòng tròn. Đó là tính chất quan trọng của vòng tròn.



Nếu bánh xe hình tròn, trục xe lắp ở tâm của vòng tròn, thì khi xe chuyển động trên mặt đất, trục xe cách mặt đất một khoảng bằng bán kính bánh xe. Vì vậy người ngồi trong thùng xe sẽ thấy yên ổn khi xe chạy trên đường. Giả sử nếu bánh xe biến dạng và không có dạng hình tròn, vành xe sẽ có chỗ cao, chỗ thấp và sàn xe không cách đều với tâm vòng tròn. Với loại xe như vậy, khi xe chạy, bạn sẽ cảm thấy xóc đến đầu váng mắt hoa.

Việc chế tạo bánh xe hình tròn còn do một nguyên nhân khác. Nếu so với một vật bất kì chuyển động trên mặt đường thì kéo xe đỡ tốn sức hơn, đó là do ở bánh xe trở lực ma sát bé hơn các trường hợp khác.

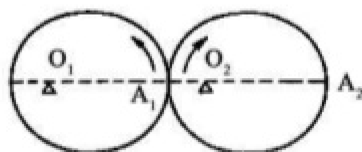
Từ khoá: *Hình tròn.*

62. Có phải mọi loại bánh xe đều là hình tròn không?

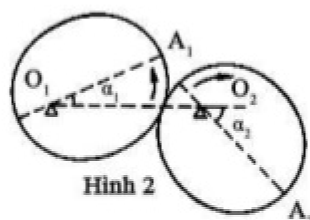
Chúng ta đã biết bánh xe thường có dạng hình tròn, vì vậy từ các điểm ở vành bánh xe đến tâm bánh xe có khoảng cách bằng nhau.

Thế nhưng có phải mọi loại bánh xe bắt buộc đều phải là hình tròn?

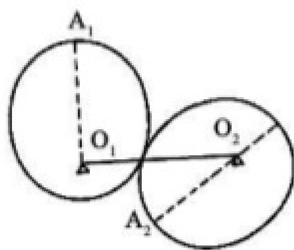
Trong hệ thống bánh xe răng, nếu như cả đôi bánh xe đều hình tròn thì thông qua sự truyền động của bánh xe răng, người ta có thể thay đổi tốc độ. Ví dụ nếu bánh chủ động có 50 răng còn bánh bị động có 100 răng, thì khi bánh chủ động quay 100 vòng thì bánh bị động sẽ quay được số vòng là 50. Bánh bị động chuyển động với tốc độ chậm nhưng chuyển động đó là chuyển động đều.



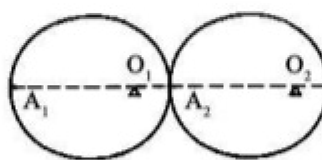
Hình 1



Hình 2



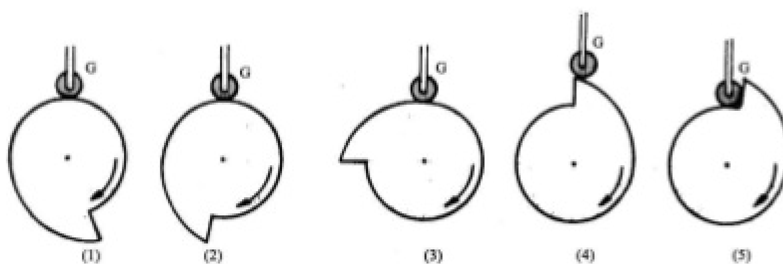
Hình 3



Hình 4

Nhưng ta muốn bánh xe chuyển động không đều thì phải làm thế nào? Bấy giờ chúng ta sẽ sử dụng bánh xe không phải hình tròn.

Bánh xe răng hình elip là một loại bánh răng như vậy, Do hình elip có tính chất là tổng của các khoảng cách từ một điểm bất kì đến các tiêu điểm là một số không đổi (ví dụ bằng *2a*). Nếu hai bánh xe răng elip có kích thước bằng nhau, thì chỉ cần điều chỉnh giữ cho khoảng cách hai trục qua hai tiêu điểm là *2a*, và cố định một trục tại một tiêu điểm thì khoảng cách từ điểm tiếp xúc của các răng đến tâm của hai trục bằng *2a*. Nói cách khác là bánh xe răng có thể chuyển động bình thường. Sau đó ta xét, giả sử bánh xe bên phải là bánh bị động và thay đổi tốc độ khi được truyền động. Từ hình 1 đến hình 2, bánh chủ động chuyển động một góc 24^{o} thì bánh bị động sẽ chuyển động một góc 45^{o}. Từ hình 2 đến hình 3 bánh chủ động chuyển động 90^{o} thì bánh bị động chuyển động 140^{o}, từ hình 3 đến hình 4, bánh chủ động chuyển động 90^{o} thì bánh bị động quay một góc 40^{o}. Như vậy khi quay hết nửa vòng thì bánh bị động chuyển động ban đầu nhanh, về sau thì chậm.



Trong sản xuất tự động hoá người ta thường dùng một loại bánh xe được gọi là “bánh lồi” (loại linh kiện cam). Trong vòng chuyển động các điểm có khoảng cách đến trục bánh xe không đều

nhau, như ở hình 5. Trên biên của bánh xe có một cơ cấu tựa G. Khi bánh xe chuyển động từ (1) - (4), cơ cấu tựa G đẩy ở vòng ngoài, khi đến (5) đột nhiên bị ngậm vào, sau đó chuyển động tiếp tục lặp lại, nhờ đó có thể thực hiện một sự điều khiển tự động nào đó.

Như vậy, không có bất kì sự vật nào là tuyệt đối; các bánh xe cũng như vậy. Trong khoa học khi phát minh, sáng tạo nếu gặp điều gì khác thường, thì phải suy nghĩ tìm cách khai thông.

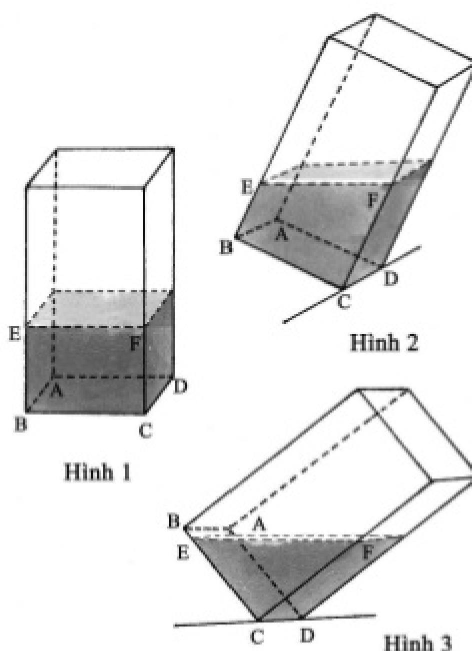
Từ khoá: *Hình tròn; hình elip; Bánh xe lồi.*

63. Nước đựng trong thùng lăng trụ, chữ nhật khi để nghiêng sẽ có hình dạng thế nào?

Xin các bạn hãy đổ vào một thùng đựng hình lăng trụ chữ nhật một lượng nước có màu (để dễ nhìn thấy), hãy cố định thùng lăng trụ chữ nhật theo một cạnh đáy. Nghiêng từ từ thùng nước nhưng giữ không cho nước đổ ra ngoài. Tuỳ theo độ nghiêng của thùng, bạn sẽ thấy khối nước trong thùng có nhiều hình dạng khác nhau. Bạn hãy quan sát kĩ xem hình dạng khối nước thay đổi theo quy luật nào?

Trước hết ta để thùng đứng thẳng trên mặt bàn theo mặt đáy *ABCD* như ở hình 1. Bấy giờ mặt bên sẽ có dạng một hình chữ nhật *BCFE*. Thể tích của khối nước sẽ bằng diện tích mặt đáy *BCFE* nhân với chiều cao *CD*.

Tiếp theo ta cố định thùng và giữ đáy *ABCD* theo cạnh *CD*. Nghiêng thùng từ từ theo như vị trí cho ở hình vẽ bên dưới. Bấy giờ diện tích mặt bên BCFE sẽ là hình thang. Hình thang này có một cạnh đáy *BE* = *a* và một cạnh đáy là *CF* = *b* và *a* + *b* sẽ là một số không đổi. Bây giờ tiếp tục cho thùng nghiêng hơn nữa, nhưng vẫn giữ mặt bên có dạng hình thang thì tổng số *a* + *b* vẫn không thay đổi. Đồng thời khi a giảm bao nhiêu độ dài thì *b* tăng độ dài bấy nhiêu. Bạn có biết tại sao không?



Khối nước vẫn lấy *BCFE* làm đáy và *CD* làm chiều cao của hình lăng trụ tứ giác và thể tích khối nước sẽ là tích số của diện tích đáy nhân với chiều cao *CD*. Do diện tích hình thang không thay đổi, chiều cao *CD* cũng không thay đổi, cũng là thể tích nước như ở hình trên. Nếu tiếp tục làm nghiêng

thùng thì mặt bên sẽ có dạng hình tam giác *ECF*. Thể tích khối nước sẽ là hình lăng trụ đáy tam giác *ECF* và chiều cao *CD*. Thể tích khối nước vẫn là thể tích khối lăng trụ chữ nhật đáy chữ nhật *BCFE* hoặc đáy hình thang *BCFE*. Giả sử *CE = c, CF = b*, diện tích hình tam giác *ECF* là $^1/_2$b x c và b x c là không thay đổi.

Khi nghiêng thùng thì khối nước thay đổi từ khối lăng trụ chữ nhật, đến lăng trụ đáy hình thang, rồi đến lăng trụ đáy tam giác, nhưng nếu không để nước chảy ra ngoài thì thể tích nước vẫn không thay đổi cho dù hình dáng khối nước có thay đổi (xem hình 1, 2, 3).

64. Vì sao thùng đựng dầu, phích đựng nước nóng đều có dạng hình trụ?

Thùng dầu, phích nước đều là các thùng, bình đựng chất lỏng. Bạn có chú ý các đồ đựng chất lỏng đều có dạng hình trụ, điều này có liên quan gì đến toán học không?

Khi sản xuất các đồ đựng người ta thường chú ý đến việc tiết kiệm vật liệu: Với cùng một lượng vật liệu làm thế nào sản xuất được bình đựng chất lỏng với dung tích lớn nhất.

Ta đã biết trong hình học phẳng, trong các hình đa giác đều và hình tròn có cùng chu vi thì hình tròn có diện tích lớn nhất. Ví dụ với diện tích 100 mm^2 thì hình vuông có chu vi 40 mm, hình tam giác đều chu vi 45,6 mm. Như vậy với cùng một diện tích thì tam giác đều có chu vi lớn nhất, hình vuông cho chu vi bé hơn và hình tròn có chu vi bé nhất. Vì vậy với các dụng cụ đựng chất lỏng, nếu các đồ đựng có cùng chiều cao thì lăng trụ tròn có dung tích lớn nhất, và việc sản xuất các lăng trụ tròn sẽ tốn ít nguyên liệu nhất. Do vậy các thùng đựng dầu, phích nước là những đồ đựng chất lỏng thường có dạng lăng trụ tròn.

Thế có loại bình đựng dạng nào tiết kiệm nguyên vật liệu hơn lăng trụ tròn không? Có. Đó chính là hình cầu. Với cùng một lượng vật liệu thì đồ đựng hình cầu sản xuất ra sẽ có dung tích lớn nhất. Nói cách khác sản xuất các đồ đựng chất lỏng hình cầu tiết kiệm được vật liệu nhiều nhất. Tuy nhiên, do các đồ đựng hình cầu dễ bị lăn đi, lăn lại, khó đứng yên; việc sản xuất các vật dụng hình cầu cũng khó hơn, khó đậy nắp hơn nên bình hình cầu không có ý nghĩa thực tế.

Tuy nhiên các đồ đựng vật rắn như hòm, rương sao lại không sản xuất có dạng hình trụ? Cho dù các đồ đựng hình trụ tiết kiệm được nguyên vật liệu nhưng đựng các vật rắn lại không thuận tiện lắm nên người ta thường sản xuất chúng ở dạng khối lăng trụ chữ nhật.

Từ khoá: *Lăng trụ tròn; Hình cầu.*

65. Vì sao khe hở của hai quả cầu lại bằng nhau?

Một thầy giáo dạy toán đã đặt ra cho học sinh một bài toán. Giả sử ta phải đánh đai Trái Đất và một quả cầu nhỏ. Hai cái đai này phải không lớn, không nhỏ quá mà phải lồng khít vào hai quả cầu. Do không cẩn thận nên người ta đã làm tăng độ dài của mỗi đai lên 1 mét. Nếu đánh đai hai quả cầu bằng các cái đai nói trên thì khe hở (giữa đai và quả cầu) ở quả cầu nào lớn hơn: ở Trái Đất hay ở quả cầu nhỏ.

Nhiều học sinh đã nhao nhao trả lời “đường nhiên là ở quả cầu nhỏ có khe hở lớn hơn”. Các học sinh đã giải thích lí do về sự khẳng định của họ như sau: Trái Đất có bán kính rất lớn nên đường chu vi của Trái Đất ở đường xích đạo sẽ rất dài, cho nên nếu tăng độ dài của chu vi 1 mét thì so với bán kính Trái Đất chiều dài 1 mét có nghĩa gì? Còn với một quả cầu nhỏ bán kính chưa đến 1 mét mà chu vi tăng thêm độ dài 1 mét, thì rõ ràng với cái đai này thì khe hở giữa cái đai và quả cầu chắc sẽ lớn lắm.

Nhưng câu trả lời này là hoàn toàn sai. Thực tế khe hở giữa đai và quả cầu ở Trái Đất và quả cầu nhỏ là như nhau. Tại sao vậy? Ta sẽ tiến hành vài phép tính toán thì sẽ thấy ngay:

Giả sử Trái Đất có chu vi *L*; còn với quả cầu nhỏ có chu vi ℓ. Khi tăng độ dài của mỗi cái đai thêm 1 mét thì chu vi của Trái Đất và quả cầu nhỏ là L + 1 và ℓ + 1. Khi chu vi tăng thêm 1 mét đường kính của mỗi quả cầu là $\frac{L+1}{\pi}$ và $\frac{\ell+1}{\pi}$ và sự sai khác của đường kính của đai và đường kính của các quả cầu sẽ tạo nên khe hở giữa cái đai và quả cầu. Ta sẽ thấy

ở Trái Đất thì khe hở sẽ là $\frac{L+1}{\pi} - \frac{L}{\pi} = \frac{L+1-L}{\pi} = \frac{1}{\pi}$

Còn ở quả cầu thì $\frac{\ell+1}{\pi} - \frac{\ell}{\pi} = \frac{\ell+1-\ell}{\pi} = \frac{1}{\pi}$

Bạn xem có phải các khe hở là như nhau không?

Từ khoá: *Hình cầu; Chu vi; Đường kính.*

66. Vì sao trên đường chạy đua, điểm xuất phát của đường ngoài lại vượt lên đường đua phía trong khá xa?

Trên các cuộc thi đấu điền kinh thường có đường chạy 200 m. Đoạn đầu của các đường đua này thường có dạng nửa hình tròn. Nếu có sáu người chạy đồng thời thì họ sẽ xuất phát trên sáu đường đua khác nhau. Điểm khởi đầu của đường chạy ngoài vượt lên phía trước khá xa so với đường phía trong.

Tại sao vậy? Điểm xuất phát này được quyết định do đâu?

Chúng ta đều biết giữa chu vi đường tròn và đường kính có một tỉ lệ xác định, đó chính là số π (số pi), số π có giá trị gần đúng là 3,14. Và chu vi của đường tròn có độ dài gấp 3,14 lần đường kính hay cũng bằng 6,28 lần bán kính của vòng tròn đó. Và C ≈ 6,28 R (C là độ dài của đường chu vi, R là bán kính vòng tròn). Nếu bán kính tăng 1 mét thì đường chu vi tăng thêm 6,28 m.

Trong các đường chạy đua, thì các đường đua đều rộng 1,2 m. Hai đường đua cạnh nhau có bán kính sai khác nhau 1,2 m, vì vậy đường chạy ngoài dài hơn đường trong kề đó 7,54 m. Theo tiêu chuẩn chung, vòng chạy ngoài thường dài 400 m, trên đường chạy đua 200 m, người ta phải tính thế nào điểm kết thúc các đường phải nằm trên một đường thẳng. Thông thường người ta bố trí đầu đường chạy là nửa cung tròn (thường dài khoảng 114 m) sau đó sẽ nhập vào đường thẳng (khoảng 86 m). Ở phần cong, đường trong cùng có bán kính 36 m, người chạy ở đường đua thứ nhất thường xuất phát ở điểm cách vòng trong là 0,3m, nên độ dài thực tế của đoạn chạy vòng là 36,3 m x 3,14 ≈ 114 m. Điểm xuất phát của mỗi vòng ngoài phải dịch lên phía trước khoảng 1,2 m x 3,14 = 3,77 m so với điểm xuất phát của vòng trong. Nếu trên đường chạy có sáu đường thì các điểm xuất phát sẽ hình bậc thang, điểm xuất phát của đường chạy ngoài cùng sẽ dịch lên phía trước 18,85 m so với đường chạy trong cùng, nhờ cách sắp xếp này mà đích của sáu đường chạy sẽ nằm trên cùng một đường thẳng. Hiểu được quy tắc này, khi chuẩn bị sân vận động nói chung người ta chỉ cần đo đường chạy trong cùng dài đúng 200 m, xác định điểm xuất phát của đường trong cùng,

sau đó các điểm xuất phát của các vòng ngoài được dịch lên phía trước một độ dài như đã tính trên kia mà không cần phải đo từng đường chạy.

67. Sức nổi của phao cứu sinh bằng bao nhiêu?

Khi bạn mang chiếc phao cứu sinh xinh xắn và vui vẻ vẫy vùng trong nước bạn có nghĩ đến điều này: Sức nổi của phao cứu sinh là bao nhiêu?

Làm thế nào để tìm được câu trả lời?



Phương pháp tối ưu là dùng các tri thức toán học để tính toán: tính thể tích khí của phao cứu sinh rồi nhân với khối lượng riêng của nước trừ đi khối lượng của phao, kết quả sẽ là sức nổi của phao cứu sinh.

Mọi người đều biết khối lượng riêng của nước là 1 g/cm^3 (tức 1 cm^3 nặng 1 g). Dưới đây sẽ giới thiệu phương pháp tính thể tích của phao cứu sinh.

Theo như hình vẽ, hình chiếu phẳng của vòng cứu sinh có tâm *O*, vòng cứu sinh có hai tiết diện. Hai tiết diện này đều là hình elip trong đó có một elip qua bốn điểm *A, B, C, D*. Trong toán học người ta gọi *AB* là trục dài của hình elip, *CD* là chiều cao của vòng cứu sinh, đó chính là trục ngắn của hình elip; OA là đường kính trong của phao cứu sinh sau khi đã bơm khí. Do đó người ta có thể tính thể tích của vòng cứu sinh theo công thức:

$$V= \frac{1}{2}\neq^{2}.AB.CD\left(OA+\frac{1}{2}AB\right)$$

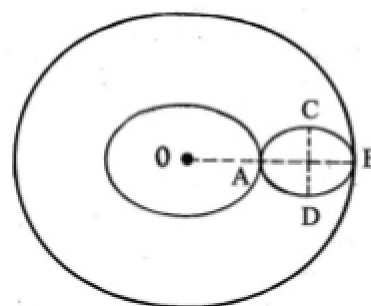
π là số pi và bằng 3,14, *AB, CD, OA* dễ dàng đo được sau khi phao đã được bơm căng. Ta thử tính toán lực nổi cho một phao cứu sinh cụ thể. Trên thị trường người ta thường bán một loại phao có đường kính vòng tròn lớn (đường kính ngoài) khi chưa bơm khí là 65 cm, làm bằng chất dẻo. Sau khi bơm khí đo được *AB* = 13 cm, *CD* = 12,5 cm. *OA* = 12 cm. Khối lượng của phao là 150 g. ứng dụng công thức nêu trên ta dễ dàng tính được V ≈ 14.835 cm^3. Do đó loại phao cứu sinh này có lực nổi là 145.383N (N: đơn vị đo lực, đọc là niutơn).

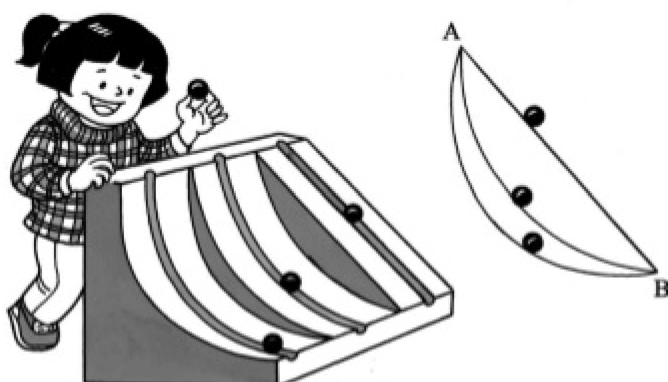
Lực nổi này có giữ được cơ thể người nổi trên mặt nước không? Có thể, vì khi người ta chìm vào nước sẽ chịu lực đẩy của nước bằng lực nổi. Bạn hãy thử xem.

Từ khoá: *Hình elip.*

68. Bi thép lăn theo con đường nào thì nhanh nhất?

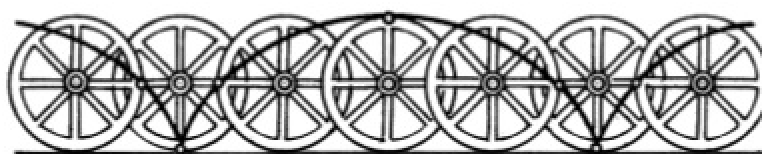
Giả sử có viên bi kim loại cho lăn từ điểm A đến điểm B theo một đường máng kim loại được đánh bóng trơn, xét xem phải chế tạo đường máng như thế nào thì thời gian để viên bi lăn từ A đến B là ngắn nhất?





Mới nhìn qua thì vấn đề không có gì khó, có bạn sẽ cho rằng tốt nhất cho viên bi lăn từ *A* đến *B* theo một đường thẳng vì đường thẳng là đường ngắn nhất nối từ điểm *A* đến điểm *B*. Nhưng vấn đề ở đây không phải là đoạn đường ngắn nhất từ *A* đến *B* mà vấn đề là thời gian để bi lăn ngắn nhất. Chúng ta cần biết rằng thời gian rơi của viên bi không quyết định do đoạn đường mà bi lăn mà còn được quyết định do tốc độ lăn của bi.

Nếu ta chế tạo máng kim loại cong xuống ở phần giữa thì khi bi lăn từ *A* xuống phần cong sẽ có tốc độ nhanh hơn từ *A* xuống đường lăn dốc hơn và tốc độ lăn của viên bi sẽ lớn hơn khi lăn theo máng thẳng có cùng độ dài. Thế nhưng có điều cần chú ý nếu ở phần đầu của máng có độ dốc quá lớn thì ở phần dưới máng sẽ gần nằm ngang nên tốc độ lăn của viên bi ở phần này sẽ rất chậm. Cho nên nếu chế tạo máng như vừa trình bày thì ở phần đầu tốc độ viên bi sẽ lớn nhưng ở phần cuối tốc độ lăn lại chậm, thời gian lăn của viên bi từ A đến B chưa hẳn đã ngắn nhất.



Như vậy phải chế tác đường máng có dạng thế nào thì thời gian lăn của viên bi là ngắn nhất.

Nhà vật lí kiêm thiên văn học Italia là Galilê đã từng nghiên cứu vấn đề này và ông cho rằng máng cần được chế tạo dưới dạng cung tròn. Thế nhưng 50 năm sau vào khoảng năm 1700, nhà toán học Thuỵ Sĩ Bernoulli đã tính toán chính xác và đi đến kết luận là máng không phải là hình tròn mà phải có dạng một xycloit. Từ đó đường xycloit được gọi là đường lăn nhanh nhất.

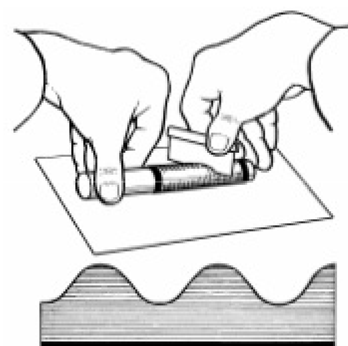
Nhưng đường xycloit là gì? Nếu trên một đường tròn, ta cho lăn mà không trượt, ta đánh dấu một điểm cố định trên vòng tròn thì khi cho vòng tròn lăn không trượt trên một đoạn đường, điểm cố định trên vòng tròn sẽ vẽ nên đường xycloit. Đó là lời giải của bài toán đặt ra. Sau này phương pháp này phát triển trở thành ngành phép tính biến phân, có tác dụng rất lớn trong lịch sử toán học.

Do sự phát triển của kĩ thuật hệ thống và vận trù học, sức thanh xuân của phép tính biến phân đã được khôi phục.

Từ khoá: *Xycloit; Phép tính biến phân.*

69. Trò chơi gấp giấy có thể gấp được những đường hình học nào?

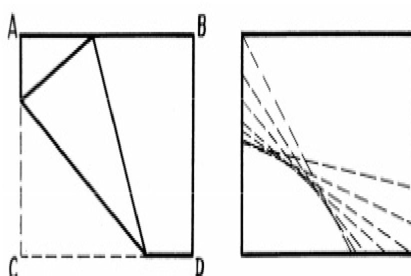
Với một tờ giấy, bạn có thể thực hiện một số trò chơi toán học thú vụ dưới đây. Bạn thử thực hiện xem.

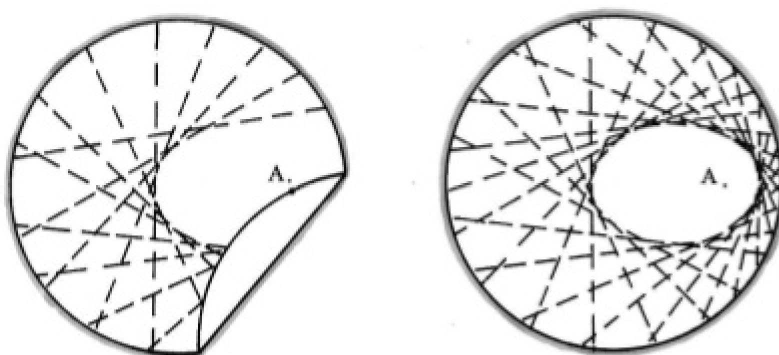


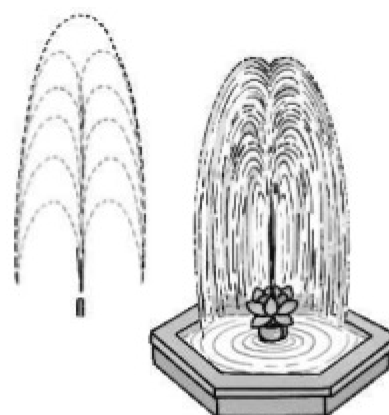
1. Cắt đường hình sin (đường lượn sóng).Cuộn chặt một tờ giấy hình chữ nhật vào một viên phấn, sau đó dùng dao cắt nghiêng một nhát. Tiếp theo mở trang giấy ra, bạn sẽ được một đường lượn sóng là đường hình sin.

2. Gấp đường parabôn. Lấy mảnh giấy hình chữ nhật *ABCD*. Gập nghiêng góc mảnh giấy sao cho đỉnh *C* nằm trên cạnh *AB*, lặp lại nhiều lần ta sẽ nhận được một đường bao là parabôn.

3. Gập đường elip. Dùng mảnh giấy hình tròn, chọn điểm *A* tuỳ ý bên trong vòng tròn nhưng không trùng với tâm. Sau đó gập mép giấy sao cho các mép cung tròn luôn qua điểm A. Lặp lại nhiều lần đường bao của mép gấp thẳng sẽ là đường bao của một elip. (Xem hình trang sau)







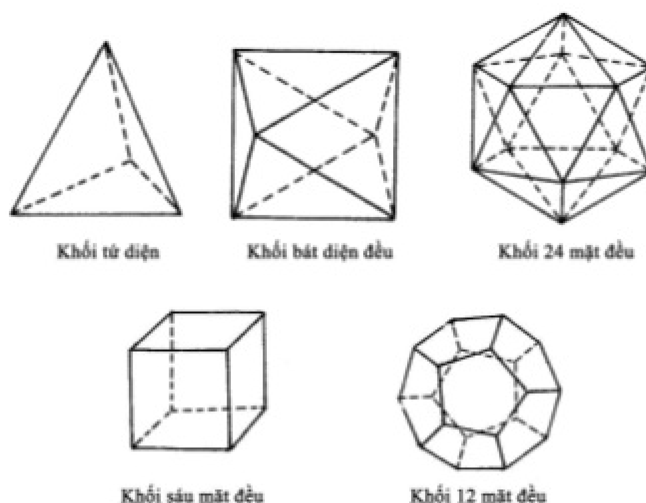
Đường bao là đối tượng nghiên cứu của một ngành toán học là hình học vi phân, đây là ngành toán học có liên quan đến nhiều vấn đề thực tế. Chắc bạn đã từng thấy các vòi phun nước ở các công viên, các tia nước phun từ vòi giếng phun vẽ lên một họ đường cong nằm trên cùng một mặt phẳng, các đường cong phẳng này giống hình một đường cong parabôn. Trên các bức ảnh phong cảnh bạn sẽ nhìn thấy rõ hình bao của chúng.

Từ khoá: *Đường hình sin; Đường parabôn; Elip; Vấn đề hình bao.*

70. Vì sao chỉ có năm loại khối đa diện đều?

Trong các tinh thể người ta thường thấy các khối đa diện đặc thù: các mặt của tinh thể là

những đa diện đều, mọi góc của đa diện đều hoàn toàn bằng nhau. Đó chính là các khối đa diện đều. Có rất nhiều khối đa diện đều, nhưng thực ra chúng được xếp thành năm loại. Tại sao vậy?



Trước hết chúng tôi xin giới thiệu công thức Ơle. Vào thế kỉ XVII, nhà toán học kiệt xuất Thuỵ Sĩ Ơle đã chỉ ra mối quan hệ ràng buộc giữa số mặt, số cạnh và số đỉnh của khối đa diện nói chung. Ông nêu ra hệ thức giải tích

$$E = V + F - 2$$

trong đó, E là số cạnh, F là số mặt, V là số đỉnh của khối đa diện.

Trong toán học người ta gọi là công thức Ơle để ghi nhớ công lao của ông. Bây giờ chúng ta sẽ vận dụng công thức Ơle để chứng minh chỉ có năm loại khối đa diện.

Giả sử khối đa diện đều được hình thành từ các mặt, mỗi mặt có m cạnh, số mặt của khối đa diện là F, thế thì F mặt sẽ có mF cạnh, mỗi cạnh lại là cạnh chung của hai mặt lân cận, vì vậy $mF = 2E$.

Giả sử mỗi đa diện đều có các đỉnh mà mỗi đỉnh lại là đỉnh của một đa giác đều có n cạnh, nếu khối đa diện có V đỉnh sẽ có nV cạnh, mỗi cạnh lại thuộc hai đỉnh nên $nV = 2E$.

Thay các giá trị của V và F tính từ hai hệ thức vừa nêu vào công thức Ơle ở trên ta có:

$$E = \frac{2E}{n} + \frac{2E}{m} - 2$$

Và sau khi biến đổi ta có:

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2}$$

Ta sẽ bắt đầu xét khối đa diện tạo nên từ các tam giác đều. Vì các góc của mặt đa diện tối đa không thể vượt quá 360^0, mà mỗi góc của tam giác đều là 60^0, nên khối đa diện do các tam giác đều tạo nên chỉ có thể có ba loại: góc tam diện đều, góc tứ diện và góc ngũ diện. Còn với các lục giác đều thì sẽ ra sao? Do 60^0 6 = 360^0 thì chỉ có thể tạo một mặt đa giác mà không tạo được khối đa diện. Còn với m = 3 ta chỉ có ba loại tình huống:

Với $n = 3$, ta tính được $E = 6, F = 4$ là một tứ diện đều.

$n = 4$, ta tính được $E = 12, F = 8$ là một khối bát diện đều.

$n = 5$, ta tính được $E = 30, F = 20$ là một khối 20 mặt.

Như vậy, với mặt tam giác đều ta chỉ có ba loại: khối tứ diện đều, khối bát diện điều, khối 20 mặt. Do vậy khi $m = 4$ và $n = 3$ thay vào công thức Ơle ta có:

$E = 12, F = 6$.

Nghĩa là với các mặt hình vuông ta chỉ tạo được khối lục diện đều.

Thế thì với các mặt ngũ giác đều thì sẽ ra sao? Vì các góc trong của ngũ giác đều bằng 1080 nên từ các ngũ giác đều ta chỉ có thể tạo được góc tam diện đều. Vì vậy khi

$m = 5, n = 3$ thay vào công thức Ơle ta sẽ tính được:

$E = 30$ và $F = 12$

Nghĩa là với các mặt ngũ giác đều chỉ có thể tạo thành một khối 12 mặt.

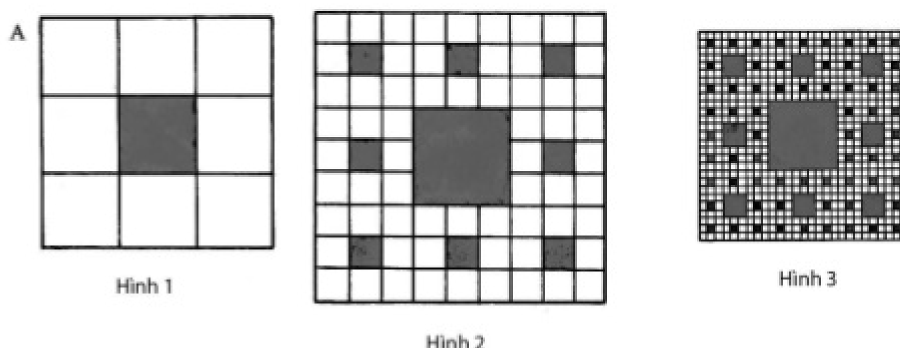
Do đó có thể thấy khối đa diện đều chỉ có năm loại: Khối tứ diện đều, khối lục diện đều, khối bát diện đều, khối 12 mặt đều và khối 20 mặt đều.

Còn với một lục giác đều thì do lục giác đều có góc trong 120^0 nên không tạo được một góc đa diện nên không tạo được khối đa diện đều.

Từ khoá: *Khối đa diện đều; Hình đa giác đều; Công thức Ơle.*

Vào những đêm mùa hè, chúng ta thường thấy các ngôi sao băng trên bầu trời sao. Các ngôi sao băng dịch chuyển trên bầu trời dưới dạng các đường cong. Nếu bạn đốt một nén hương trừ muỗi (tốt nhất vào ban đêm) rồi di động, đốm lửa ở đầu nén hương sẽ vẽ thành đường cong giống như sao băng. Chính từ gợi ý này mà các nhà toán học đã nghĩ ra phương pháp “vẽ bằng điểm” để vẽ các đường cong. Đường tròn, đường parabôn, đường hypecbôn, đường hình sin v.v... đều được vẽ theo phương pháp vẽ điểm.

Thế nhưng liệu có phải mọi đường cong phẳng đều có thể được vẽ bằng phương pháp vẽ điểm? Tiến thêm một bước có thể đặt câu hỏi liệu có thể có các đường cong phẳng nhất định cần phải được vẽ ra không?



Đến đây ta lại cần phải định nghĩa về đường cong phẳng. Thực ra từ năm 1893, nhà toán học Pháp Giocđan (Jordan) đã đưa ra định nghĩa rõ ràng về đường cong mà trước đó các nhà toán học chưa hề đưa ra định nghĩa chính thức về đường cong. Đường cong là một khái niệm mà hình học sử dụng như một khái niệm ban đầu. Trong khái niệm ban đầu này, đường cong là đường được vẽ ra chỉ có độ dài mà không có bề rộng, và một đường được tự nhiên vẽ ra sẽ là một loại đường cong.

Từ sau khi có định nghĩa rõ ràng về đường cong, tuỳ theo sự phát triển của toán học, đặc biệt với sự phát triển của các ngành hình học vi phân, tôpô học, khái niệm đường cong ngày càng được mở rộng. Việc vẽ được hay không vẽ được không còn là tiêu chuẩn để phân biệt các đường cong. Các nhà toán học thực sự đã nghĩ ra không ít loại đường cong không thể vẽ ra được. Ví dụ nhà toán học Ba Lan Serfinski đã đưa ra định nghĩa “thảm Serfinski” là một loại đường cong phẳng. Serfinski đã làm như sau:

Chọn một hình vuông A chia thành 9 hình vuông nhỏ bằng nhau sau đó khoét bỏ hình vuông ở giữa như ở hình 1. Sau đó lại tiếp tục chia 8 hình vuông ở ngoài biên này (người ta gọi chúng là hình vuông cấp một), mỗi hình vuông thành 9 hình vuông nhỏ khác bằng nhau, sau đó

lại khoét bỏ hình vuông nhỏ ở giữa (hình 2) và nhận được $8^2 = 64$ hình vuông bao ngoài biên (ta gọi chúng là các hình vuông cấp hai). Sau đó lại tiếp tục chia các hình vuông cấp hai theo phương pháp tương tự như đã mô tả ở trên, ta sẽ được $8^3 = 512$ hình vuông bao quanh khác (ta gọi đó là các hình vuông cấp ba) (hình 3). Tiếp tục quá trình như vừa mô tả đến vô hạn lần, cuối cùng hình vuông chỉ còn lại tập hợp các điểm C được gọi là “Thảm Serfinski”. “Tấm thảm” này phù hợp với định nghĩa một đường cong phẳng. Đường cong phẳng loại này rõ ràng khác với đường cong phẳng thông thường khác, đường cong loại này không vẽ được bằng phương pháp vẽ điểm. Loại đường cong phẳng này có tác dụng quan trọng trong quá trình nghiên cứu khái niệm vẽ đường cong.

Từ khoá: *Đường cong; Thảm Serfinski.*

Khi đọc đề mục này chắc bạn sẽ tự hỏi tại sao lại đặt ra câu hỏi? Tổng các góc trong của một tam giác bằng 180^0 chẳng là một định lí đã được chứng minh rồi sao? Liệu có thể có kết luận khác không?

Trên thực tế, hơn 100 năm trước đã có người nghiên cứu vấn đề này và đã đưa ra 2 kết luận khác hẳn nhau: "Tổng các góc trong của một tam giác lớn hơn 180^0" và kết luận "tổng các góc trong của một tam giác nhỏ hơn 180^0".

Thế nhưng liệu ba kết luận hoàn toàn mâu thuẫn nhau này liệu có đồng thời đúng cả không? Sự thật cuối cùng sẽ thế nào?

Chúng ta đều biết các chứng minh trong toán học được thành lập đều xuất phát từ những tiên đề và định đề là những mệnh đề không yêu cầu phải chứng minh. Chính từ các tiên đề, định đề, người ta suy diễn, suy luận mà thiết lập, chứng minh các định lí. Ví dụ trong chương trình môn hình học phẳng của bậc trung học người ta đề ra năm tiên đề và năm định đề làm cơ sở cho các phép chứng minh định lí:

Tiên đề 1: Hai đại lượng bằng nhau với đại lượng thứ ba thì hai đại lượng đó bằng nhau.

Tiên đề 2: Thêm một đại lượng vào hai đại lượng bằng nhau thì các tổng thu được sẽ bằng nhau.

Tiên đề 3: Trừ một đại lượng vào hai đại lượng bằng nhau thì hiệu của chúng sẽ bằng nhau.

Tiên đề 4: Hai hình trùng nhau thì bằng nhau.

Tiên đề 5: Cái toàn thể lớn hơn cái bộ phận.

Định đề 1: Từ hai điểm bất kì có thể nối nhau bằng một đường thẳng.

Định đề 2: Đường thẳng có độ dài vô hạn.

Định đề 3: Từ một điểm bất kì chọn làm tâm, có thể vẽ vòng tròn có bán kính lớn bất kì.

Định đề 4: Các góc vuông đều bằng nhau.

Định đề 5: Nếu hai đường thẳng cắt nhau với một đường thẳng khác thì tổng các góc trong đồng vị sẽ nhỏ hơn hai góc vuông, hai đường thẳng ở cùng một phía so với đường thẳng kia ắt phải cắt nhau.

Trong số 5 tiên đề và định đề nêu trên, trừ định đề số 5 đều được thể hiện trong phạm vi hữu hạn, có thể dùng thực nghiệm để kiểm chứng. Riêng định đề thứ 5 có phạm vi mở rộng đến vô hạn nên ngay từ thế kỉ thứ XIV trước Công nguyên đã nhiều lần đưa ra các hoài nghi. Nhiều nhà toán học đã qua hàng ngàn năm nỗ lực định nhờ các tiên đề, định đề khác để chứng minh định đề 5 song chưa đạt được thành công, nhưng đã thu được nhiều sự kiện thú vị: Một là định đề 5 và mệnh đề "tổng các góc trong của một tam giác bằng 180^0" là tương đương nhau, từ mệnh đề này có thể suy ra mệnh đề kia. Hai là nếu bác bỏ định đề số 5 và dùng một mệnh đề đối lập khác thay thế: ví dụ dùng mệnh đề "tổng các góc trong một tam giác lớn hơn 180^0" hoặc "tổng các góc trong một tam giác nhỏ hơn 180^0" thay thế định đề 5, thì kết hợp định đề mới với các tiên đề và định đề khác người ta có thể suy diễn, chứng minh chính xác các mệnh đề khác.

Nói cách khác, người ta có thể xây dựng một môn hình học khác cho dù môn hình học này người ta không thể qua kinh nghiệm mà nhận biết, nhưng có thể qua chứng minh để chứng tỏ đó là chân lí.

Trong toán học người ta gọi môn hình học chấp nhận mệnh đề “tổng các góc trong của một tam giác bằng 180^{0}” là hình học Ơclid (Euclide), còn hình học chấp nhận “tổng các góc trong của tam giác lớn hơn hoặc nhỏ hơn 180^{0}” là “hình học phi Ơclid”. “Hình học phi Ơclid” đã được các nhà toán học Nga là Lôbasepski và toán học Đức là Riman sáng lập vào thế kỉ XIX, và được gọi là hình học Lôbasepski và hình học Riman. Vào thế kỉ XX, hình học phi Ơclid bắt đầu được ứng dụng trong nghiên cứu cơ học và vật lí học. Vào năm 1915, hình học phi Ơclid đã được Einstein ứng dụng vào học thuyết tương đối rộng, điều đó không chỉ làm người ta hiểu sâu hơn về hình học phi Ơclid mà còn thúc đẩy sự phát triển của hình học phi Ơclid.

Từ khoá: *Tiên đề; Định đề; Hình học Ơclid, phi Ơclid.*

Một hành khách bay từ Bắc kinh đến Sans-Francisco, máy bay cất cánh tại sân bay lên chín tầng mây cao đến hàng vạn mét. Hành khách mới lần đầu đi máy bay đường dài nên cảm thấy hết sức thú vị. Thế nhưng khi quan sát hành trình bay trên màn hình máy thu hình anh ta lại lấy làm lo lắng: Vì Bắc Kinh và Sans-Francisco có vĩ độ gần nhau, Sans-Francisco lại hơi lệch về phía nam, nhưng sau khi cất cánh, máy bay lại bay lệch về hướng Đông Bắc, về miền Alaska. Liệu có phải phi hành đoàn đã nhầm đường? Chàng hành khách trẻ đem thắc mắc hỏi một vị giáo sư toán học ngồi bên cạnh. Vị giáo sư cả cười và trả lời “chính máy bay hiện đang bay theo đường bay ngắn nhất đó”

Anh bạn đồng hành ngơ ngác “Thưa giáo sư, thế chẳng phải giáo sư thường giảng trên lớp: đường ngắn nhất nối liền hai điểm là đường thẳng kia mà. Anh bạn trẻ chỉ màn hình và nói “thầy xem chẳng phải bây giờ đường bay của máy bay ngày càng tách xa con đường ngắn nhất đó sao” Vị giáo sư kiên trì giải thích: Đúng là giữa hai điểm trên mặt phẳng thì đường thẳng là đường ngắn nhất nối liền hai điểm đó. Thế nhưng mặt đất lại không phải là mặt phẳng mà là một mặt giống mặt cầu. Trên mặt cầu thì đường ngắn nhất nối hai điểm là cung của vòng tròn lớn nối hai điểm đó. Vòng tròn lớn là giao tuyến của mặt phẳng qua tâm hình cầu và mặt cầu. Hai điểm trên mặt cầu và tâm điểm của mặt cầu xác định mặt phẳng qua tâm mặt cầu vì vậy hai điểm trên mặt cầu phải nằm trên một vòng tròn lớn xác định. Hai điểm này xác định một cung xác định trên vòng tròn lớn, đó là đoạn đường ngắn nhất nối hai điểm trên mặt cầu. Ví dụ các đường kinh tuyến trên Trái Đất đều qua hai cực Bắc - Nam của Trái Đất nên các kinh tuyến đều là các vòng tròn lớn. Đường xích đạo cũng là một vòng tròn lớn. Còn các vĩ tuyến thì chỉ là các đường song hành với đường xích đạo mà không phải là vòng tròn lớn nên trừ đường xích đạo ra, các vĩ tuyến khác không phải là vòng tròn lớn. Từ đó có thể thấy mặc dù Bắc Kinh và Sans-Francisco có vĩ độ gần nhau nhưng đường ngắn nhất nối hai địa điểm không phải là vĩ tuyến mà là cung tròn lớn qua Alaska.

Cậu hành khách trẻ tuổi hiểu ra và trả lời: Thưa thầy em rõ rồi! Anh bạn trẻ thích thú kêu lên “Tốt quá, thế là hôm nay chúng ta lại được dịp bay đến vòng cực Bắc”. “Đúng đấy”. Có ai đấy trả lời. Bỗng nghe thấy một giọng nữ bình tĩnh nói: Giáo sư giảng rất đúng. Nhưng chúng ta còn cần chú ý thêm một điều nữa: Trên một tuyến bay xác định ta còn phải chịu sự quản lí trên không trung là một nhân tố bảo đảm an toàn của đoàn bay, nên thực tế tuyến bay thường chỉ chọn men theo các cung tròn trên vòng tròn lớn.

Nhưng khi anh bạn trẻ theo dõi trên màn hình lại nảy ra một thắc mắc mới: “Thế có phải trên địa đồ các cự ly không theo đúng tỉ lệ với khoảng cách trên thực địa”, vì theo bản đồ thì cự ly gần nhất không phải là men theo cung tròn của vòng tròn lớn? “Giáo sư tiếp tục giảng giải thêm: Bề mặt địa cầu nếu không thay đổi thì không thể dán phẳng được bản đồ biểu diễn mặt đất hoặc một phần mặt đất trên một tấm ảnh phẳng nên không thể biểu diễn trung thực được cự ly trên bản đồ. Trên tấm bản đồ của phạm vi nhỏ (như bản đồ một thành phố, một tỉnh) thì người ta khó nhận biết

được sự sai lệch này. Trên tấm bản đồ của phạm vi nhỏ cự ly trên bản đồ về cơ bản vẫn phản ánh cự ly thực tế theo một tỉ lệ xích quy định. Trên tấm bản đồ trong phạm vi lớn thì không thể bỏ qua sự sai lệch đã nêu trên. Ví dụ theo tấm bản đồ thế giới trên màn hình thì ở Bắc cực, một cự ly của hai vùng phụ cận so với cự ly đồng dạng ở xích đạo có độ dài lớn hơn nhiều lần. Tỉ lệ xích của tấm bản đồ này chỉ thích hợp cho miền Xích đạo. Vì vậy với tấm bản đồ cho phạm vi lớn ta không thể căn cứ cự ly trên bản đồ để phán đoán cự ly trên thực tế. Thế nhưng với quả cầu địa lí dùng mặt cầu để biểu diễn mặt đất thì cự ly trên mặt quả cầu phản ánh chính xác cự ly thực.

Máy bay đã bay đến không phận Alaska, cậu hành khách trẻ tuổi hết sức thú vị vì đã học hỏi được nhiều điều qua chuyến bay.

Từ khoá: *Vòng tròn lớn.*

Đây là bài toán cổ nổi tiếng được ghi trong sách "Sách toán Tôn tử". Nội dung bài toán như sau:

"Một số gà và thỏ được nhốt chung trong một lồng, đếm số đầu thì được 35 đầu, nếu đếm chân thì có 94 cái chân. Hỏi trong lồng nhốt bao nhiêu gà, bao nhiêu thỏ".

Người đời sau gọi loại bài toán này là "Bài toán gà thỏ chung lồng". Nếu bây giờ dùng kiến thức giải hệ phương trình thì việc giải bài toán là khá dễ dàng. Nếu gọi x là số gà và y là số thỏ, dựa theo đề toán ta viết hệ phương trình

$$x + y = 35$$

$$2x + 4y = 94$$

Giải hệ phương trình hai ẩn số ta dễ dàng tìm thấy $x = 23$, $y = 12$.

Trong "Sách toán Tôn tử" người ta đã sử dụng lí luận sau đây để đưa ra lời giải: Một nửa số chân trừ đi số đầu sẽ bằng số thỏ tức

$$^{94}/_{2} - 35 = 12 \text{ thỏ.}$$

Lấy số đầu trừ số thỏ sẽ là số gà: 35 -12 = 23.

Cách giải tự nhiên và cũng hợp lôgic.

Trong sách không hề đưa ra nguyên nhân đưa ra lời giải, nhưng con đường để đưa ra lời giải cũng dễ thấy.

Vì gà chỉ có hai chân, thỏ có bốn chân, số chân thỏ gấp đôi số chân gà. Nếu lấy một nửa số chân trừ đi số đầu (của cả thỏ và gà) ta thấy được số đầu thỏ và từ đó dễ dàng tìm thấy số đầu gà (tức số gà trong lồng). Nếu dùng kí hiệu thay thế ta sẽ dễ dàng thấy rõ cách lập luận vừa nêu. Nếu gọi x là số gà, y là số thỏ thì

$$^{1}/_{2}(2x + 4y) - (x + y) = y$$

Lấy tổng số thỏ và gà trừ đi số thỏ ta có $(x + y) - y = x$

Bài toán thỏ - gà về sau xuất hiện nhiều phương án, cách giải cũng khác nhau. Ngoài cách giải trên đây có thể có cách giải khác. Ví dụ giả thiết toàn bộ số đầu trong lồng đều là đầu thỏ thì số

chân ắt phải có là gấp bốn lần số đầu tức phải có 140 chân. Thực tế lại chỉ có 94 chân nên số chân thừa là 46 do ngộ nhận gà thành thỏ, mà gà có hai chân, số gà phải là một nửa số chân thừa và là 23. Và số đầu thỏ phải là tổng số đầu trừ đi số đầu gà tức số đầu thỏ là 12.

Từ khoá: *Bài toán gà và thỏ chung lồng.*

Vào thế kỉ thứ V ở Trung Quốc có bộ sách toán nổi tiếng là "Sách toán Trương Khâu Kiện" trong đó có bài toán trăm con gà. Đem 100 đồng mua 100 con gà, gà trống giá 5 đ 1 con, gà mái giá 3 đ một con, 3 gà con giá 1 đồng. Hỏi mua được mấy gà trống, mấy gà mái, mấy gà con. Đây là loại bài toán con gà nổi tiếng.

Làm thế nào để giải bài toàn 100 con gà? Ngày nay thông thường người ta dùng phương pháp đại số để giải bài toán này.



Giả sử gọi x là số gà trống, y là số gà mái, z là số gà con mua được. Theo điều kiện của bài toán ta đặt các phương trình:

$x + y + z = 100$	**(1)**
$5x + 3y + z/3 = 100$	(2)

Trong đại số ta đã học qua cách giải hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn số, nhưng điều khác ở đây là số phương trình ít hơn số ẩn số. Với các bài toán giải hệ phương trình, nếu số phương trình bằng số ẩn số thì bài toán sẽ cho hệ nghiệm duy nhất. Ở đây số phương trình ít hơn số ẩn số một phương trình, đây là loại phương trình vô định nên bài toán 100 con gà là bài toán phương trình vô định. Nói chung với phương trình vô định, khi giải sẽ cho nhiều hệ nghiệm. Trong "Sách toán Trương Khâu Kiện" không đưa ra cách giải cụ thể mà chỉ ra 3 hệ đáp án:

$x = 4$	$x = 8$	$x = 12$
$y = 8$	$y = 11$	$y = 4$
$z = 78$	$z = 81$	$z = 84$

Từ các hệ nghiệm này có thể thấy, nếu tăng số gà trống 4 con thì khi giảm số gà mái 7 con và tăng số gà con 3 con, ta thu được hệ nghiệm mới. Ta thử xem xét kết luận vừa đưa ra.

Lấy phương trình (2) nhân cho 3 rồi đem kết quả trừ cho phương trình (1) ta có.

$14x + 8y = 200$

hay $7x + 4y = 100$ (3)

Trong phương trình (3), 4 y và 100 đều là bội số của 4 hay

$$7x = 100 - 4y = 4 (25- y)$$

Vì vậy $7x$ cũng phải là bội số của 4 (nếu không x sẽ không phải là số nguyên và x sẽ không phải là nghiệm của bài toán), hay nói cách khác x phải là bội số của 4, nên x chỉ có thể là x = 4, 8, 12.

Và tương ứng ta sẽ tính ra y = 18, 11, 4 và z = 78, 81, 84. Vì x, y, z phải là các số nguyên nhỏ hơn 100 nên cho dù phương trình vô định có vô số hệ nghiệm nhưng do sự ràng buộc của bài toán 100 con gà, bài toán trên chỉ có ba hệ nghiệm phù hợp với điều kiện của đề toán.

Từ khoá: *Bài toán 100 con gà.*

Đây là nội dung của trò đố vui cổ: Có người cần chở một con sói, một con dê và một sọt rau cải qua sông (ở đây giả thiết là sói không ăn thịt người). Bên bờ sông chỉ có một con thuyền nhỏ. Người nọ muốn đưa cả sói, dê và rau sang bờ bên kia nhưng thuyền lại quá nhỏ, mỗi lần chỉ có thể chở qua một đồ vật, nếu chở hai đồ vật trở lên thì thuyền sẽ chìm. Mặt khác nếu không có sự giám sát của người thì sói sẽ ăn thịt dê hoặc dê sẽ ăn hết rau cải, nên nếu dê, sói, rau cải mà không có sự giám sát của người thì không thể để chúng ở cùng nhau. Vậy phải làm thế nào? Cần phải tìm phương án qua sông để dê, sói và rau đều an toàn qua sông?

Đây chính là “bài toán chở qua sông” hay còn gọi là bài toán “Sói, dê, rau”. Đối với nhiều người thì đây là bài toán không khó, chỉ cần thử mấy lần là sẽ tìm được đáp án cần thiết. Thế nhưng nếu lại đặt câu hỏi bài toán có bao nhiêu lời giải thì đã là câu hỏi khó.

Suy nghĩ một chút bạn sẽ đưa ra được nhiều phương án chở qua sông mà sói, dê, rau sẽ không bị gây hại. Các tình huống được liệt kê như dưới đây:

Trạng thái	Bờ sông bên này	Bờ sông đối diện
1		Người, sói, dê, rau
2	Người, sói, dê	rau
3	Người, sói, rau	dê
4	Người, dê, rau	sói
5	Người, dê	sói, rau
6	Sói, rau	Người, dê
7	Sói	Người, dê, rau

8	Dê	Người, sói, rau
9	Rau	Người, dê, sói
10		Người, sói, dê, rau

Trạng thái 1 là trạng thái đầu, trạng thái 10 là trạng thái cuối cùng cần đạt được. Người chở thuyền mỗi lần đưa sang sông một thứ và là một lần thay đổi trạng thái. Bước thứ nhất, người cần mang một thứ tải qua sông, nên bên này sông còn lại hai thứ (trạng thái 5, 6 ở trong bảng) chỉ có thể ở trạng thái 6 người chở dê qua sông.



Bước thứ hai, người đưa thuyền trở về tức ở trạng thái thứ ba. Bước thứ ba người lại mang một thứ tải qua sông, bờ bên kia chỉ xuất hiện hai loại tình huống (trạng thái 7, 9 trong bảng) tức có hai loại phương án. Chúng ta hãy xem loại tình huống thứ nhất, người mang rau qua sông, tức loại trạng thái thứ bảy. Bước thứ tư, lần này người không thể đưa thuyền không trở về vì dê sẽ ăn mất rau, vì vậy người phải mang một thứ trở về, đương nhiên không thể là rau, nếu không thì coi như là bỏ mất bước thứ ba và sẽ quay trở lại trạng thái ba. Nên người lại phải mang dê trở về, nên lại xuất hiện trở lại trạng thái thứ hai. Bước thứ năm người lại mang sói qua sông (người đã mang dê trở về bên bờ này, nếu lại mang trở lại chẳng phải lại lặp lại sao). Bây giờ ta sang trạng thái thứ tám. Bước thứ sáu người có thể đưa thuyền về không vì sói và rau có thể ở cùng nhau tức ở trạng thái thứ năm. Bước thứ bảy người lại mang dê qua sông, và đã hoàn thành được công việc.

Theo phương pháp này bạn có thể tự hoàn thành phương án hai. Và bạn đã phát hiện chỉ cần qua bảy bước là phương án hai được hoàn thành. Và để đưa được sói, dê và rau sang sông cần ít nhất là bảy lần, và nếu yêu cầu không lặp lại mỗi loại trạng thái thì bài toán sang sông chỉ có hai lời giải.

Từ khoá: *Bài toán qua sông.*

Trong một buổi lên lớp, thầy giáo đã đưa ra cho học sinh một đề toán sau đây: Trên một chiếc thuyền có 75 con trâu, 32 con dê, hỏi thuyền trưởng bao nhiêu tuổi.

Mấy phút sau, các học sinh đã làm xong. Thầy giáo yêu cầu bé Hoa đưa ra lời giải của mình, bạn Hoa trả lời “Thuyền trưởng 43 tuổi”. Thầy giáo lại gọi bạn Lâm nói kết quả, bạn Lâm trả lời “Thuyền trưởng 53,5 tuổi”. Nghe hai câu trả lời, bạn Dũng nói “Bài toán này không giải được”. Các bạn nghĩ xem trong ba bạn học sinh, bạn nào đã nói đúng?

Sự thực thì số tuổi của thuyền trưởng không hề có mối liên quan nào với số trâu, dê trên thuyền. Vì thế từ 75 con trâu và 32 con dê không thể nào tính được tuổi của thuyền trưởng.

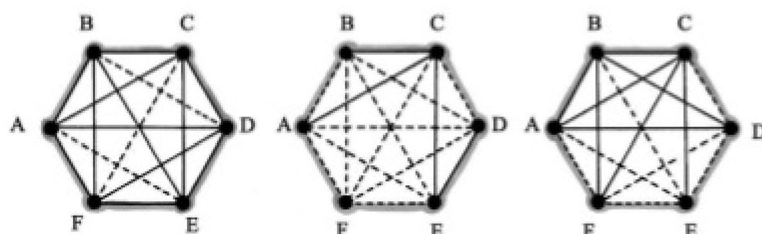
Thế tại sao bạn Hoa và bạn Lâm đều đưa ra lời giải đáp cho một bài toán không có lời giải. Nguyên do là các em cũng nghĩ đến việc bài toán không có lời giải nhưng lại nghĩ rằng phàm thầy giáo đã ra đề lẽ nào lại là bài toán không có lời giải. Vì thế bé Hoa đã giảm bớt con số lớn còn bạn Lâm lại lấy trung bình của hai số làm lời giải.

Trong cuộc thi Olympic toán quốc tế năm 1947 ở Hungari có một bài toán như sau: Chứng minh rằng trong một nhóm sáu người bất kì ít nhất có ba đã từng bắt tay nhau hoặc ít nhất có ba người chưa từng bắt tay nhau". Tháng 6-1956 một tờ nguyệt san toán của Mỹ đã chuyển mệnh đề này thành một trò chơi toán học, từ đó hai bài toán trở thành một đề toán lí thú mà người ta thường gọi là "bài toán nhóm sáu người".

Làm thế nào chứng minh mệnh đề đó? Trước hết ta có thể sắp xếp nhóm sáu người bất kì này trên sáu điểm đỉnh khác nhau và đại diện bằng các chữ cái *A, B, C, D, E, F,* dùng các nét liền để nối các đỉnh biểu diễn là người bắt tay nhau, và dùng nét đứt để biểu diễn việc hai người chưa hề bắt tay nhau. Nhờ đó ta biểu diễn được trạng thái bắt tay (và không bắt tay nhau) của nhóm sáu người thành giản đồ. Trên hình 1 mô tả trạng thái bắt tay của sáu người.

Theo như hình 1 có bao nhiêu trạng thái? Trong mỗi quan hệ bắt tay nhau, từ mỗi điểm đỉnh có thể vẽ 5 đường thẳng nối liền với các đỉnh khác tức là 6 x 5 = 30 cạnh, nhưng trong đó có một nửa là trùng nhau. Và như vậy trạng thái bắt tay nhau có 30 : 2 = 15 cạnh, mỗi cạnh lại có hai loại nét liền và nét đứt và như vậy trong mối quan hệ bắt tay nhau của sáu người có 2^{15} tình huống khác nhau. Dưới đây ta sẽ chứng minh luận đề nêu trên.

Trước hết ta xét một điểm đỉnh như *A* chẳng hạn ít nhất có thể bắt tay với ba người, và ít nhất cũng có ba người không bắt tay với *A*. Cũng tương tự ta sẽ tìm thấy trạng thái không bắt tay của *A* với ba người. Trước hết ta xét tình huống 1, ít nhất có ba người bắt tay với *A*.



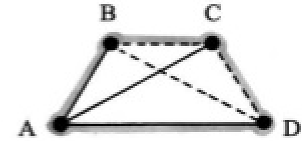
Hình 1

Ví dụ *B, C, D* chẳng hạn. Như tình huống ở hình 2 biểu diễn ít nhất có ba người *B, C, D* chưa bắt tay với *A* (đường nối là nét đứt), nếu không số người bắt tay và không bắt tay nhau sẽ nhỏ hơn 5. Trước hết ta xét tình huống 1 trong trạng thái này. A ít nhất bắt tay với ba người ví dụ với *B, C, D* chẳng hạn. Nếu *B, C, D* là ba người chưa hề bắt tay nhau (hình 2) nên đây là tình huống có người chưa hề bắt tay nhau. Nếu không, trong ba người ít nhất có hai người bắt tay nhau, ví dụ giữa *C* và *D* (hình 3) như vậy đã đáp ứng với mệnh đề ít nhất có ba người bắt tay nhau. Ta hãy xét loại tình huống thứ hai, ít nhất *A* chưa hề bắt tay với ba người khác, giả sử với *B, C, D*; bấy giờ ta chỉ cần thay nét liền thành nét đứt trên hình 2. Các chứng minh tương tự, các bạn có thể tự tiếp tục và sẽ tìm được kết luận cần thiết. Từ các lí luận trên đây chúng ta có thể chứng minh, trong nhóm sáu người bất kì, ít nhất có ba người bắt tay nhau hoặc ít nhất có ba người chưa hề bắt tay nhau.

Người ta có thể tiến thêm một bước nữa, trong nhóm có sáu người ít nhất có ba người từng bắt tay nhau, hoặc ít nhất ba người chưa hề bắt tay nhau. Thế nhưng nếu số người ít hơn sáu thì kết

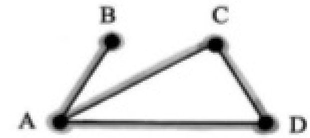
luận sẽ không phù hợp. Hình 4 biểu diễn điều đó: trong nhóm sáu người không có ba người đã bắt tay nhau, cũng không có ba người chưa hề bắt tay nhau.

Từ khoá: *Bài toán nhóm sáu người.*



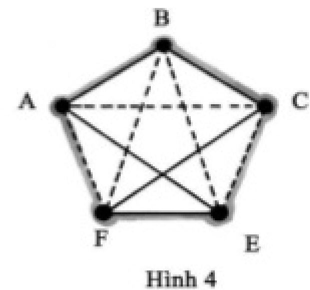


Hình 2





Hình 3



Hình 4

Nếu bạn muốn biết ngày nào đó trong lịch sử hoặc trong tương lai là ngày thứ mấy, nếu không dùng lịch, bạn có tính ra được không?

Trong thực tế có nhiều loại công thức dùng để tính toán ngày nào, tháng nào của một năm nào đó là ngày thứ mấy?

Ví dụ:

$$S = x - 1 + \left[\frac{x-1}{4}\right] + - \left[\frac{x-1}{100}\right] + \left[\frac{x-1}{400}\right] + C$$

Trong đó x là năm dương lịch. C là số ngày tính từ ngày 1 tháng giêng năm đó đến ngày cần tính (gồm cả ngày cần tính trong đó).



Các số hạng là phân số khi tính xong chỉ lấy phần nguyên. Sau khi tính được S, đem S chia cho 7. Nếu số dư của phép chia bằng 0, số ngày cần tính là ngày chủ nhật, nếu số dư là 1 thì là ngày thứ hai v.v...

Ví dụ cần xem ngày 1-7-1921 là ngày thứ mấy?

Ta tính

$$S = 1921 - 1 + \left[\frac{1921-1}{4}\right] - \left[\frac{1921-1}{100}\right] + \left[\frac{1921-1}{400}\right] +$$

$$+ 31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 1$$

= 1920 + 480 - 19 + 4 + 182 = 2567

Chia S cho 7 ta được số dư là 5. Vậy ngày 1-7-1921 là ngày thứ sáu.

Công thức trên đây không đưa ngày, tháng, trực tiếp vào công thức mà phải tính ngày cần tính là ngày thứ mấy trong năm. Công thức Taylor dưới đây cho phép ta tránh được điều đó.

$$W = \left[\frac{C}{4}\right] - 2C + y + \frac{y}{4} + \left[\frac{26(m+1)}{10}\right] + d - 1$$

Trong đó C là hai số đầu của năm dương lịch; *y* là hai số sau của năm dương lịch, *m* là số tháng, *d* là số ngày; điều cần chú ý là với tháng 1 và tháng 2 thì người ta xem là tháng 13 và tháng 14. Sau khi tính được *W* theo công thức Taylor, đem chia *W* cho 7, số dư cho ta ngày thứ mấy như ở công thức trước.

Ví dụ: 1. Thử tính ngày 1-10-1949 là ngày thứ mấy?

Theo trên ta có $C = 19$, $y = 49$, $m = 10$, $d = 1$

Dùng công thức Taylor ta có:

$$W = \frac{19}{4} - 2 \times 19 + 49 + \left[\frac{49}{4}\right] + \left[\frac{26(10+1)}{10}\right] + 1 - 1$$

= 4- 38 +12 +28

= 55

Lấy 55 chia cho 7 dư 6 nên ngày 1-10-1949 là ngày thứ bảy.

2. Ngày 13-1-1999 là ngày thứ mấy?

$C = 19$, $y = 99$, $m = 13$, $d = 13$. Ứng dụng công thức Taylor ta có:

$$W = \left[\frac{19}{4}\right] - 2 \times 19 + 99 + \left[\frac{99}{4}\right] + \left[\frac{26(13+1)}{10}\right] + 13 - 1$$

= 4 - 38 + 99 + 24 + 36 +12 = 137

chia 137 cho 7 dư 4, vậy ngày 13-1-1999 là ngày thứ năm.

Từ khoá: *Công thức Taylor.*

Bài toán này gần như khá đơn giản: có thể dùng phương pháp tính trực tiếp là tìm ra. Các cách tính toán được sẽ là:

1. Nếu chỉ dùng đồng 1 xu. Chỉ có một cách.



2. Dùng đồng 2 xu kết hợp đồng 1 xu. Việc sử dụng đồng 2 xu có thể dùng từng đồng kết hợp với đồng 1 xu, dùng hai đồng 2 xu kết hợp, dùng ba đồng 2 xu kết hợp, dùng bốn đồng 2 xu kết hợp đồng 1 xu và dùng năm đồng 2 xu. Như vậy tất cả có năm cách.

3. Dùng một đồng 5 xu kết hợp với dùng năm đồng 1 xu; dùng một đồng 2 xu và ba đồng 1 xu; dùng hai đồng 2 xu và 1 đồng một xu. Như vậy có tất cả ba cách.

4. Dùng hai đồng 5 xu, chỉ có một cách.

Theo như mô tả tổng số cách sắp xếp sẽ là 1 + 5 + 3 + 1 = 10 cách.

Thế nhưng ngoài cách phân tích trực tiếp như trên liệu còn có phương pháp tổng quát hơn không? Có. Bạn chỉ cần tính hệ số A_{10} của số hạng x^{10} của công thức dưới đây:

$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10})$.

$(1 + x + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10})$.

$1 + x^5 + x^{10} = 1 + A_1x + A_2x + \ldots A_{10}x^{10} + \ldots + x^{30}$

Thế A_{10} bằng bao nhiêu vậy?

1. Hai số hạng x^{10} ở hai nhân tử trước nhân với số 1, ở nhân tử thứ 3 là số hạng chứa x^{10}, các luỹ thừa x^2 nhân với x^8 và x^4 nhân với x^6 đều được x^{10} tất cả có sáu số hạng chứa x^{10}.

2. Hai số hạng chứa x^5 ở nhân tử đầu, với ở nhân tử thứ 3 ta cũng thu được x^{10}. Bởi vì ở nhân tử thứ hai, tất cả các luỹ thừa của x đều là số chẵn nên chỉ có x^5 và x^3 và x^2, x^1 và x^4 là 3 cách tạo được x^5, nên ta chỉ có $3x^{10}$.

3. Cuối cùng số 1 ở hai nhân tử còn lại nhân với x^{10} là được một số hạng chứa x^{10}. Tổng các số

hạng có chứa x^{10} như vừa mô tả ở trên ta có

$$A_{10} = 6 + 3 + 1 = 10.$$

Ta lặp lại kết quả đã nhận được ở phương pháp phân tích trực tiếp trên kia.

Phương pháp vừa trình bày được gọi là "phép toán hàm số gốc". Phương pháp quan trọng này được nhà toán học Thuỵ Sĩ Ơle đưa ra.

Nếu như cần tìm cách sắp xếp các đồng 1 xu, 2 xu, 5 xu, 1 hào, 2 hào, 5 hào để được đủ 1 đồng (100 xu) hỏi phải có bao nhiêu cách sắp xếp, với trường hợp này việc tính dựa vào phân tích trực tiếp đã trở nên rất khó khăn. Nhưng nếu dùng "phương pháp hàm số gốc" ta sẽ có công thức.

$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{100}).(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{100})$

$(1 + x^5 + x^{10} + \ldots + x^{100}).(1 + x^{10} + x^{20} + \ldots + x^{100})$

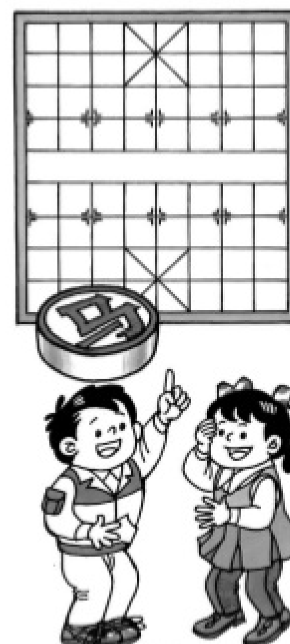
$(1 + x^{20} + x^{40} + \ldots + x^{100}).(1 + x^{50} + x^{100})$

Ta chỉ cần khai triển chúng và tìm hệ số A_{100} của số hạng chứa x^{100}. Nhờ thao tác máy móc này, nhờ các máy tính điện tử ta có thể dễ dàng thực hiện và tìm được giải pháp.

Từ khoá: *Hàm số gốc.*

81. Vì sao con "mã" lại có thể đi đến vị trí bất kì trên bàn cờ tướng?

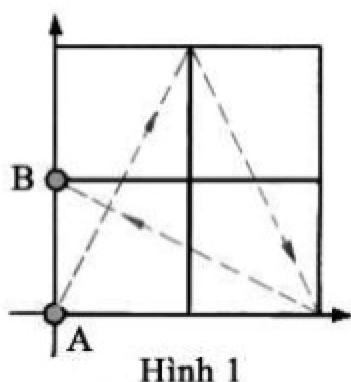
Trong bàn cờ tướng Trung Quốc con "mã" đi theo quy tắc là nhảy đến đỉnh đối diện của chữ nhật. Liệu con "mã" có thể đi đến vị trí bất kì trên bàn cờ không? Câu kết luận là "có", có thể chứng minh khá đơn giản.



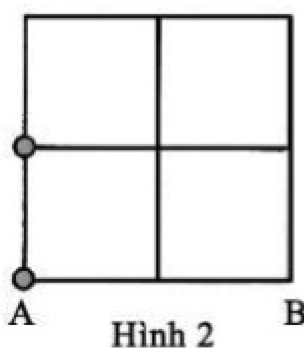
Hiển nhiên chỉ cần con "mã" đi đến được hai vị trí ở cạnh nhau trên bàn cờ. Như trên hình 1 giả định vị trí ban đầu của con "mã" tại điểm *A*, ta cần đưa con mã đến vị trí B cạnh đó. Chúng ta có thể thấy *A* hoặc *B* ở trên khu vực một chữ điền 田 trên bàn cờ. Ta có thể chứng minh con "mã" có thể dựa theo quy tắc đi nhảy trong phạm vi chữ điền đã chọn là có thể đến được điểm *B* ở lân cận *A*. Các khu vực có thể được chọn là một trong hai khu vực đối xứng như ở hình 1 và hình 2. Con mã từ *A* đi đến *B* ở hình 1 hoàn toàn giống như ở hình 2, vì vậy ta chỉ cần xét trường hợp như hình 1.

Ta có thể dùng hệ toạ độ vuông góc. Giả sử toạ độ của *A* được biểu diễn *A* (0,0) đi đến điểm *B* (0,1) ta có thể dùng ba nước đi *A* (0,0) → (1,2) →(2,0) → *B* (0,1).

Điều đó chứng minh kết luận đã nêu trên.



Hình 1



Hình 2

Như vậy vấn đề đặt ra đã được trả lời. Như vậy từ phương pháp đơn giản là dùng hệ toạ độ vuông góc để giải quyết bài toán, ta có thể biến vấn đề cho dù nhìn qua khá phức tạp thành vấn đề có thể giải quyết được bằng biện pháp đơn giản.

82. Cần bao nhiêu phép thử để tìm được một phế phẩm trong 81 sản phẩm sản xuất ra?

Có 81sản phẩm được sản xuất ra nhưng trong đó có một sản phẩm có vết rỗng bằng hạt cát nên trở thành phế phẩm, cần phải tìm ra phế phẩm đó. Đương nhiên là nhìn bằng mắt thường người ta không thể nhận ra phế phẩm đó, do vết rỗng ở bên trong phế phẩm, nên phế phẩm sẽ nhẹ hơn chính phẩm. Như vậy ta có thể dùng cách cân để tìm ra phế phẩm. Nhưng vấn đề đặt ra là phải thực hiện bao nhiêu phép cân thì mới tìm được phế phẩm.

Phương pháp kiểm tra chung là bỏ hai sản phẩm vào hai đĩa cân, nếu cân không bị lệch thì đó là hai chính phẩm, nếu không thì vật nhẹ hơn sẽ là phế phẩm. Như vậy với lần cân đầu tiên ta có

thể phát hiện được là có phế phẩm hay không? Nếu như có ba sản phẩm ta có thể phát hiện ra phế phẩm với một lần cân. Bởi vì nếu chỉ có ba vật phẩm mà nếu có một phế phẩm thì khi đặt hai vật phẩm lên cân nếu cân thăng bằng thì phế phẩm là vật chưa đưa lên cân, còn nếu cân bị lệch thì phế phẩm là vật nhẹ hơn.

Thế nếu có chín vật phẩm liệu có phải cân đến chín lần không? Trước hết ta chia sản phẩm thành ba đống, mỗi đống có ba sản phẩm. Tuỳ ý chọn hai trong ba đống đặt lên hai đĩa cân. Với một lần cân bạn có thể phát hiện phế phẩm ở đống nào. Sau đó lại chọn phế phẩm từ đống có chứa phế phẩm. Sau đó dùng biện pháp như trên ta có thể tìm được phế phẩm, như vậy chỉ cần hai lần cân.

Dựa theo lí luận tương tự, ta chia 81 sản phẩm thành ba đống, mỗi đống 27 sản phẩm. Sau đó chọn hai đống bất kì trong ba đống, đặt lên hai đĩa cân, nhờ đó có thể xác định phế phẩm chia làm ba nhóm mỗi nhóm chín cái, lại lấy hai trong ba nhóm đem cân. Đến đây ta đã thực hiện bốn lần cân, nhờ đó có thể tìm được phế phẩm trong 81 sản phẩm.

Nếu như số sản phẩm nhiều hơn ví như 243, 729...ta cần tìm quy luật. Nếu như bạn đã tìm ra thì nếu số linh kiện là 3n, thì n sẽ là số lần cân để tìm phế phẩm. Ví dụ $81 = 3^n$ thì nếu cần tìm phế phẩm trong 81 sản phẩm ta cần bốn lần cân. Còn $243 = 3^5$, $729 = 3^6$ thì nếu cần tìm phế phẩm trong 243, 729 sản phẩm thì số lần cân ít nhất là năm lần và sáu lần. Nếu số linh kiện không bằng 3^n thì phải làm thế nào? Xin các bạn tự tìm giải pháp.

83. Làm thế nào để sắp xếp khéo léo 250 quả táo vào tám chiếc giỏ?

Vấn đề như sau: giả thiết dung tích của các chiếc giỏ đủ lớn để có thể xếp số lượng bất kì các quả táo vào giỏ, làm thế nào xếp 250 quả táo vào tám chiếc giỏ mà khi cần lấy số táo bất kể là bao nhiêu ta cũng không cần phải đếm từng quả mà chỉ cần chọn số giỏ là được.



Vậy phải làm thế nào? Suy nghĩ kĩ một chút ta sẽ thấy thực chất của vấn đề như sau: Làm thế nào chia 250 thành tám số tự nhiên từ 1 đến 250 sao cho có thể biểu diễn số 250 bằng tổng của tám số đó.

Trước hết ta đánh số giỏ từ , , ,..., . Sau đó cho vào giỏ số quả táo tương ứng 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 123, nhờ đó ta có thể bỏ toàn bộ số táo vào các giỏ. Bây giờ bất luận bạn cần lấy bao nhiêu quả táo, bạn chỉ cần lấy các số giỏ thích hợp mà không cần đếm từng quả. Ví dụ như cần lấy 55 quả, ta biết 55 = 32 + 16 + 4 + 2 + 1 và ta chỉ cần lấy các giỏ số , , , , là đủ số quả táo là 55 mà không cần

đếm từng quả táo. Không tin bạn thử tính và thấy bất kì số nào từ 1 đến 250 đều có thể chọn từ tổng các số khác nhau từ tám số nêu trên.

Nếu bạn cần lấy 255 quả táo thì đương nhiên ta chỉ có một đáp án là:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 = 255.$$

Thế dãy số trên đây từ đâu mà có? Để giải đáp câu hỏi này ta cần quay lại cách ghi số trong các hệ đếm.

Thông thường người ta ghi số theo hệ đếm thập phân gồm 10 chữ số:

0, 1, 2,..., 9. Dùng hệ đếm thập phân ta có thể ghi lại bất kì số tự nhiên nào.

Trong máy tính người ta lại dùng cách ghi số theo hệ đếm nhị phân. Các chữ số dùng để ghi số trong hệ nhị phân là hai chữ số 0 và 1. Dùng cách ghi số theo hệ đếm nhị phân người ta cũng có thể ghi bất kì một số tự nhiên nào.

Chúng ta có thể theo quy tắc, chuyển cách ghi số từ hệ đếm thập phân sang hệ đếm nhị phân và ngược lại. Ví dụ số 55 là tổng của các số 32, 16, 4, 2, 1 ghi theo hệ đếm nhị phân là 110111. Mà số 110111 viết theo hệ đếm cơ số 10 là

$1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 \times 1 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^5$

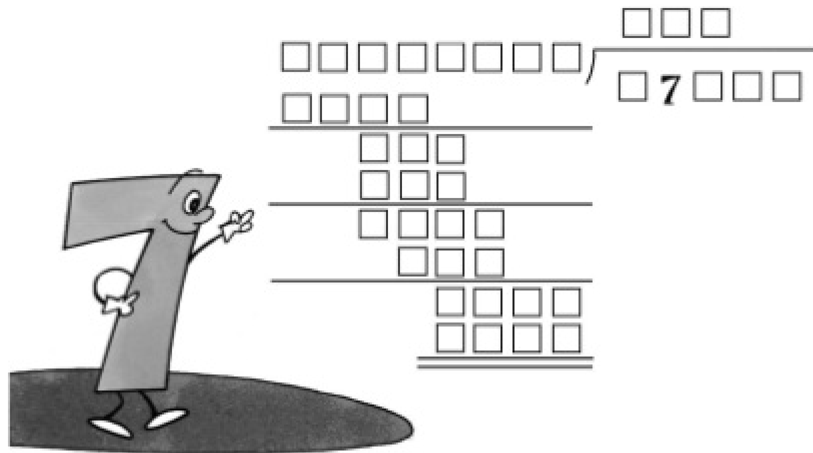
$= 1 + 2 + 4 + 16 + 32 = 55$

Bây giờ ta đã thấy rõ được lí do của đáp án trên kia, vì cách chia 255 thành 8 số 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4... nhờ cách phân chia này, mỗi số của mỗi giỏ tương đương với một vị trí trong cách ghi số theo cơ số hai gồm hai chữ số 1 và 0 và dựa vào đó mà chọn hay không chọn. Nếu số hiệu của các giỏ cúng chính là số vị trí của các số theo hệ đếm cơ số hai từ phải sang trái ví dụ 55 thì tương đương với 110111 trong hệ đếm cơ số 2 tức là chọn các giỏ có số thứ tự 1, 2, 3, 5 và 6 ta sẽ nhận được 55 quả táo như đáp án đã nêu. Ở đây ta không chọn giỏ số bốn vì theo cách ghi số 55 theo cơ số hai, giỏ số bốn ở vị trí có chữ số 0.

Từ khoá: *Hệ đếm cơ số 1; Hệ đếm cơ số 2.*

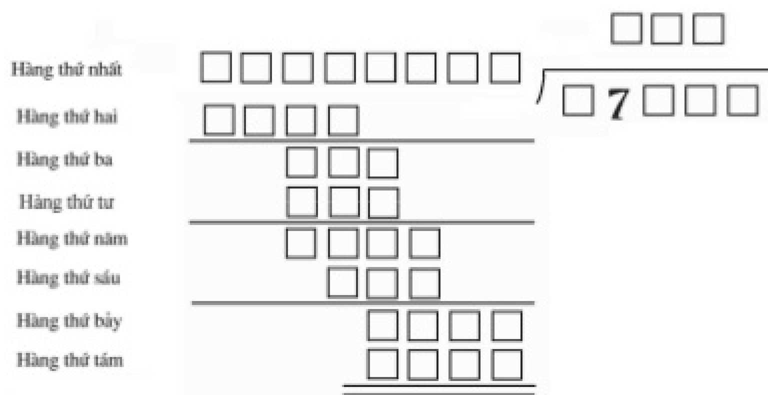
84. Làm thế nào từ số 7 cô lập có thể khôi phục lại toàn bộ cả phép tính?

Xét xem phép tính sau đây chỉ có mỗi số 7 còn các vị trí các chữ số khác đều bỏ trống. Làm thế nào có thể khôi phục được toàn bộ phép tính chia đã cho. Số bị chia là con số có 8 chữ số, thương số có 5 chữ số, còn số chia có 3 chữ số. Nhìn vào các hàng số tận cùng rõ ràng đây là phép chia hết. Số các chữ số trong phép tính này có đến 41 chữ số mà ta chỉ biết có mỗi chữ số 7. Bạn có thể dựa vào mỗi con số 7 khôi phục lại toàn bộ các chữ số còn bỏ trống:



Hiện tại ta có thể dùng phương pháp suy luận lôgic, lấy con số 7 làm điểm đột phá để suy ra toàn bộ các chữ số trong phép tính.

Để tiện diễn giải, chúng ta nêu toàn bộ kí hiệu phép chia dưới đây:



Trước hết xét hàng thứ ba và hàng thứ tư. Do con số có ba chữ số thì con số tối đa không quá 999, còn ba chữ số ở hàng thứ tư thì chữ số đầu nhất định không vượt quá số 8.

Chữ số thứ tư ở thương số rõ ràng là số 0 (vì con số ở hàng thứ bảy có nhiều hơn ở hàng thứ sáu hai chữ số về phía bên phải). Hiện tại vẫn chưa có cách phát hiện chữ số thứ ba ở thương số, tức con số đứng cạnh số 7 ở bên phải. Chỉ cần so sánh các hàng thứ ba, thứ tư với hàng thứ năm, hàng thứ sáu bạn sẽ phát hiện được là chữ số này phải lớn hơn 7, nên chỉ có thể là chữ số 8 hoặc chữ số 9.

Lại xét chữ số ở bên trái chữ số 7, chữ số này khi nhân với số chia sẽ được một số có bốn chữ số, còn chữ số ở bên phải số 7 khi nhân với số chia lại được một số có ba chữ số, vả lại con số có ba chữ số này phải không quá bé, không những thế phải là con số lớn hơn con số ở hàng thứ tư. Từ đó có thể đi đến phán đoán: chữ số ở bên phải số 7 phải là số 8, chữ số ở bên trái số 7 phải là số 9 và toàn bộ thương số sẽ là 97809.

Lại xét đến hàng thứ sáu. Do tích số của số chia với số 8 là một số chỉ có ba chữ số, nên có thể phán đoán số chia phải nhỏ hơn 125. Nếu như vậy ta bắt đầu thử với số 124. Lấy số 124 nhân cho 97809, sau khi tính được số bị chia ta lại thực hiện phép chia:

```
12128316 | 124
         |-----
         | 97809
1116
----
 968
 868
----
 1003
 992
----
  1116
  1116
  ====
```

Đây có phải là lời giải duy nhất không? Bây giờ ta lại thử phép chia với số chia 123:

```
12030507 | 123
         |-----
         | 97809
1107
----
 960
 861
----
 [995]
 984
----
  1107
  1107
  ====
```

Con số trong ô chữ nhật có ba chữ số trong khi theo sơ đồ thì con số ở đó có bốn chữ số (hàng thứ năm), nên số chia 123 bị loại trừ. Rõ ràng không cần phải thử tiếp các số chia nhỏ hơn 123.

Việc từ một đầu mối mong manh mà phát hiện được toàn bộ đã cung cấp cho người ta một phương pháp suy nghĩ có ích. Gọi theo từ chuyên môn là "bài toán sâu gặm". Ban đầu phương pháp này được dùng để phát hiện các chữ số trong tài liệu, sách vở đã bị mối, mọt gặm mất, hiện nay phương pháp đã được sử dụng rộng rãi trong khoa học kĩ thuật. Bài toán con số 7 cô độc nêu trên chính là một loại "bài toán sâu gặm", là kiệt tác của Audling.

Từ khoá: *Bài toán sâu gặm.*

85. Thế nào là nguyên tắc ô kéo?

Có sáu quyển sách cần xếp vào năm ô kéo. Có nhiều cách xếp sách vào các ô kéo, có ô kéo không có quyển sách nào, có ô kéo có một quyển sách, hai quyển sách,...thậm chí xếp đến sáu quyển sách. Thế nhưng cho dù cách xếp thế nào cũng có thể có một ô kéo ít nhất có hai quyển sách.

Nếu xem mỗi ô kéo đại diện cho một tập hợp, mỗi quyển sách là một phần tử của tập hợp. Giả sử có $n + 1$ hoặc hơn $n + 1$ phần tử xếp vào n tập hợp, thì rõ ràng trong đó ít nhất có một tập hợp có hai yếu tố. Đó chính là ý nghĩa trừu tượng của nguyên tắc ô kéo.

Ta xét một số ví dụ sau đây: Trong một lớp có 54 học sinh, giả thiết các học sinh đều sinh ra trong cùng một năm, thế thì ít nhất có hai học sinh được sinh ra trong cùng một tuần lễ. Vì sao lại như vậy? Dùng nguyên tắc ô kéo chúng ta lí giải điều đó khá dễ dàng.

Vì mỗi năm có 53 tuần lễ, ta xem mỗi tuần lễ như một ô kéo, xem mỗi học sinh như một quyển sách. Như vậy trong 53 ô kéo ít nhất có một ô kéo có hai quyển sách, nên ít nhất có thể có hai học sinh sinh ra trong cùng một tuần lễ.

Nói chung số quyển sách không nhất thiết chỉ nhiều hơn số ô kéo một quyển, mà có thể nhiều hơn. Ví dụ có 31 quyển sách xếp vào năm ô kéo. Bất kể là cách xếp sách như

thế nào, ít nhất có một ô kéo được xếp đến bảy quyển sách. Tổng quát hơn nếu có $m \times n + 1$ hoặc lớn hơn $m \times n + 1$ phần tử xếp vào n tập hợp, thì cho dù chọn cách xếp như thế nào, trong đó ít nhất có 1 tập hợp có m +1 yếu tố.

Vận dụng nguyên tắc ô kéo ta có thể giải "bài toán nhóm 6 người". Trong nhóm 6 người bất kì ít nhất có 3 người nắm tay nhau, hoặc ít nhất có 3 người chưa hề nắm tay nhau. Xin các bạn thử xem.

Từ khoá: *Nguyên tắc ô kéo.*

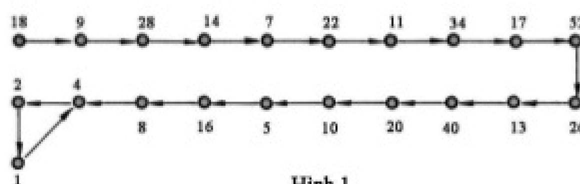
86. Thế nào là bài toán 3x + 1?

Bạn tuỳ chọn một số x là số tự nhiên bất kì, ứng dụng tính chất của số tự nhiên, người ta có thể tạo nên một số tự nhiên y mới, theo phương pháp sau:

$$y = \begin{cases} 3x + 1 & \text{nếu } x \text{ là số lẻ} \\ \dfrac{x}{2} & \text{nếu } x \text{ là số chẵn} \end{cases}$$

Trong số học, từ một số tự nhiên chọn tuỳ ý, theo một quy tắc nhất định tạo được một số tự nhiên khác (số mới này có thể bằng số ban đầu hoặc không bằng số ban đầu), người ta gọi đó là phép biến đổi. Ví dụ dựa vào quy tắc biến đổi có thể biến số 18 thành 9,9 hoặc bằng 28 v.v...Vấn đề là xuất phát từ một số tự nhiên, biến đổi liên tục ta sẽ thu được kết quả như thế nào? Đó là câu hỏi khá lí thú hết sức hấp dẫn của trò chơi toán học.

Dưới đây ta lấy số tự nhiên 18 làm ví dụ. Ta thử xem phép biến đổi liên tục sẽ như thế nào? Như thể hiện ở hình 1 cuối cùng xuất hiện vòng tuần hoàn 4214. Trên hình 2 thể hiện phép biến đổi của một số lẻ, số 21 cuối cùng cũng xuất hiện vòng tuần hoàn tương tự.



Hình 1



21 64 32 16 8 4 2 1

Hình 2

Ban đầu chỉ thuần tuý là một trò chơi số học, lưu hành ở địa phương nào đó của nước Mỹ. Ngày nay trò chơi đã phổ biến rộng rãi sang Châu Âu, sau đó theo người Nhật mà lưu truyền sang Châu á. Hiện tại trò chơi đã lưu truyền rộng rãi ở nhiều nước trên thế giới. Thậm chí ngày nay người ta đã dùng máy tính điện tử để xem xét các biến đổi các số từ 1 đến 7 x 10*11* kết quả cũng đều nhận được vòng 4214. Đó chính là bài toán 3x + 1 hay còn gọi là vấn đề Kolaxi...Thế nhưng kết luận còn chưa có cách chứng minh và còn bó hẹp trong phạm vi số tự nhiên.

Từ khoá: *Bài toán 3x +1.*

87. Từ một đôi thỏ ban đầu sẽ sinh được bao nhiêu đôi thỏ nữa trong một năm?

Mời các bạn xem xét nhóm số dưới đây:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233.

Dãy số này được gọi là dãy số Phibônaxi, mỗi con số trong dãy số được gọi là số hạng Phibônaxi.

Phibônaxi là nhà toán học Italia, vào thời trung cổ. Sau khi đi du lịch ở phương Đông ông đã viết một quyển sách toán “Sách toán pháp”. Trong sách có đưa ra một bài toán về khả năng sinh đẻ của một đôi thỏ: Nếu mỗi đôi thỏ trong một tháng sinh được một đôi thỏ con, mà mỗi đôi thỏ mới sinh sau khi sinh được ba tháng sẽ lại đẻ được một đôi thỏ mới. Giả sử không có tử vong của thỏ trong thời gian đang xét, như vậy một đôi thỏ mới sinh thì sau một năm sản sinh được bao nhiêu đôi thỏ mới?

Giả thiết tháng 12 năm trước, đôi thỏ non ra đời. Vào tháng 1 năm mới vẫn chỉ có một đôi thỏ. Đến tháng 2, đôi thỏ này lại sinh một đôi thỏ mới, tổng cộng có hai đôi. Đến tháng 3, đương nhiên chỉ có đôi thỏ sinh vào tháng 12 năm trước sinh một đôi thỏ mới, nên tổng cộng vào tháng 3 ta có ba đôi thỏ. Đến tháng 4, đôi thỏ ở độ tuổi hai tháng sẽ sinh một đôi thỏ mới, vì vậy có hai đôi thỏ mới sinh, thêm vào ba đôi thỏ đã có nên vào lúc này ta có tất cả là năm đôi thỏ. Đến tháng 5 lại có đôi thỏ sinh vào tháng 3 lại sinh một đôi thỏ mới, nên có ba đôi thỏ mới sinh thêm vào năm đôi thỏ vốn có, vậy vào tháng 5 ta có tất cả là tám đôi thỏ. Cứ suy luận tính toán liên tiếp như đã trình bày ở trên, ta sẽ có số các đôi thỏ mới sinh sẽ theo đúng dãy số Phibônaxi và ở số hạng thứ 13, số đôi thỏ sẽ là 233 đôi. Như vậy ta đã tìm được lời giải cho bài toán đã nêu trên.

Nghiên cứu dãy số ta sẽ tìm thấy quy luật tạo nên dãy số: Con số đứng sau bằng tổng hai số liên tiếp trước đó. Dùng phương pháp quy nạp toán học ta có thể tính được số hạng thứ *(m + n)* của dãy số theo công thức

$$a_{m+n} = a_{m-1}.a_n + a_m.a_{n+1}$$

Dùng quy tắc này ta có thể tính số hạng bất kì của dãy số Phibônaxi. Ví dụ khi cần tính số hạng thứ 25 là a_{25}. Ta đặt m = 13, n = 12. Từ đó ta có:

$a_{13+2} = a_{13.1}.a_{12} + a_{13}.a_{12+1} = a_{12}^2 + a_{13}^2$

= 1442 + 2332 = 75025

Bạn hãy thử tính số hạng a_{24}

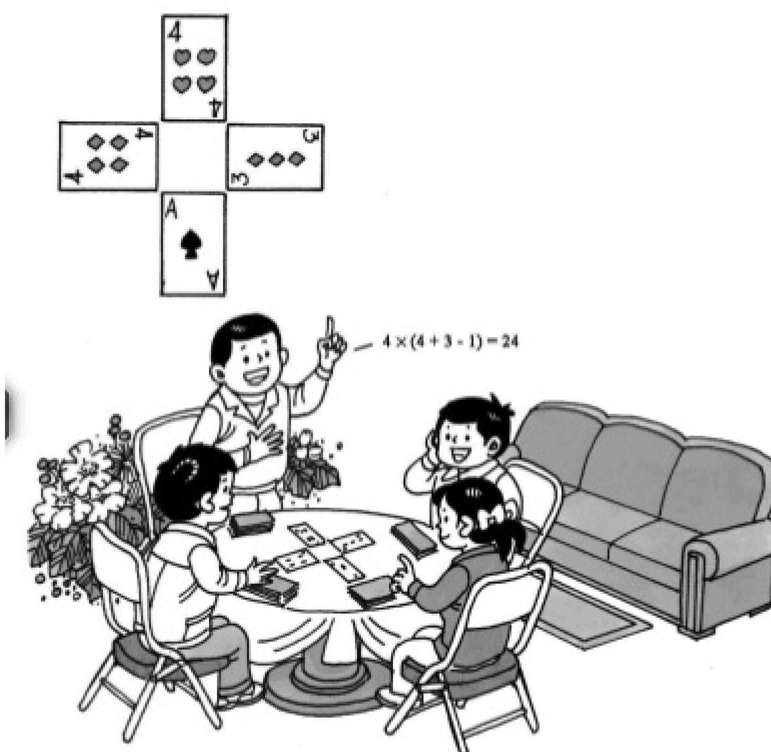
Từ khoá: *Dãy số Phibônaxi; Số hạng Phibônaxi.*

88. Có bao nhiêu tình huống xuất hiện 24 điểm với 40 lá bài?

Trò chơi bài “24 điểm” là loại bài chơi đấu trí. Cách chơi như sau: Mỗi bộ bài tú lơ khơ, nếu lấy các con bài có số A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 với cả bốn loại hoa thì tất cả có 40 con bài, con A được xem là số 1. Chia đều toàn bộ bài cho bốn người chơi. Mỗi người úp số lá bài của mình trên bàn. Sau đó bắt đầu cuộc chơi, bốn người đồng thời lật một lá bài trong số bài của mình. Yêu cầu mỗi người chơi căn cứ theo số của lá bài (không kể hoa) tiến hành cộng, trừ, nhân, chia các con số để nhận được số 24. Ai thực hiện xong trước người đó sẽ thắng. Ví dụ với bốn lá bài: Con 4 rô, 4 cơ, 3 nhép và A bích. Dùng các cách sau đây sẽ nhận được số 24: 4 x (4 +3 -1) hoặc 3x (4+4)x

Như vậy khi có bốn lá bài xuất hiện trên mặt bàn thì có bao nhiêu tình huống có thể thực hiện các phép tính để nhận được số 24?

Do không cần để ý đến loại hoa của các con bài cũng như thứ tự phân bố lá bài trên mặt bàn, nên bài toán nêu trên thực tế là trong các số từ 1 - 10, lấy tuỳ ý bốn số trong 10 số thành từng tổ hợp (cho phép có sự trùng số). Để tiện việc tính toán, ta có thể



chọn cách xử lí nhóm số theo như dưới đây: Sắp xếp các số theo thứ tự từ nhỏ đến lớn 0, 1, 2, 3,..., sau đó lập một bộ bốn số tương ứng một - một để lập thành một bộ bốn số mới. Nếu không kể sự trùng lặp của các số cũng như thứ tự sắp xếp các số trong bộ số, các bộ số tạo thành một tổ hợp chập bốn của n yếu tố. Nếu chọn n = 10 như điều kiện bài toán đặt ra thì số tình huống theo như bài toán đặt ra sẽ là:

$$C_{10}^{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 210 \text{ tình huống}$$

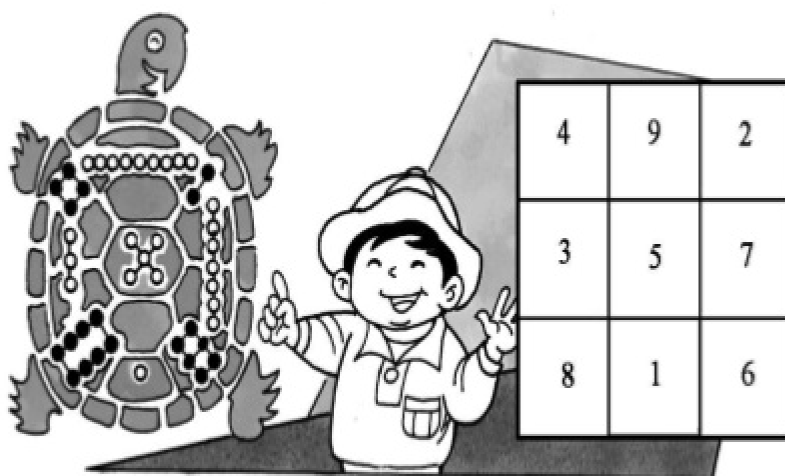
Như vậy trong trò chơi 24 điểm với 40 lá bài sẽ là 210 trường hợp.

Từ khoá: *Tổ hợp.*

89. Thế nào là hình vuông bí ẩn?

Theo truyền thuyết vào thời vua Đại Vũ trị thuỷ (23 thế kỉ trước Công Nguyên), có một con rùa lớn nổi lên trên sông Lạc, trên lưng con rùa có chín loại hoa văn, người đời sau gọi đó là "Lạc thư". Trên thực tế đó là chín số tự nhiên liên tục được xếp trên ba hàng với chín ô. Điều kì diệu là ở chỗ tổng tất cả số trên một hàng hoặc một cột, trên đường chéo đều bằng 15, vả lại chín số tự nhiên này không có sự lặp lại trong các ô, cũng không bỏ sót.

Hơn nữa các nhà nghiên cứu lại thấy là không chỉ ở Lạc thư mới có các ô vuông bí ẩn này. Nếu xếp các số tự nhiên từ 1 đến n^2 trên các ô vuông thì người ta cũng thu được các hình vuông có tính chất tương tự và được gọi là "biểu đồ ngang dọc" (đồ thị 2 chiều), còn ở phương Tây người ta gọi là "ma trận vuông ảo". Các hình vuông có hàng và cột và số hàng và cột là n thì gọi là bậc của hình vuông ảo hay "ma trận[1] bậc n". Bậc của hình vuông trong "Lạc thư" là bậc ba (xem hình dưới), đây chính là loại ma trận đơn giản nhất.



Người ta còn tìm thấy các số trong ma trận chỉ cần là n^2 số bất kì mà không nhất thiết phải là các số tự nhiên từ 1 đến n^2. Các số tự nhiên được xếp vào các ô vuông gọi là các ma trận có *n* cột, *n* hàng. Ngày nay các ma trận có bậc *n* ngày càng lớn. Ma trận bậc ba hiện không chỉ có một ma trận trong Lạc thư. Xuất phát từ ma trận Lạc thư nếu thêm vào các số một số, ta sẽ được một ma trận mới. Với một ma trận cấp ba với một số k cho trước nếu thêm vào số *(k - 1)d* (*d* là số bất kì) ta cũng nhận được một ma trận bậc ba mới:

9	14	7
8	10	12
13	16	11

10	25	4
7	13	19
22	1	16

Các bạn có thể tìm xem các ma trận này được cấu tạo như thế nào không?

Gần đây người ta đã mở rộng ý nghĩa của ma trận. Các ma trận này không chỉ có tổng các số theo hàng ngang, hàng dọc, theo đường chéo bằng nhau mà tích các số cũng bằng nhau, người ta

gọi đó là các “ma trận kép mở rộng”. Hai ma trận kép, một ma trận có tám hàng, tám cột, còn ma trận kia có số hàng số cột gấp đôi.

Thế liệu các ma trận có ứng dụng gì trong thực tiễn? Trước hết ta thử xem lsy thuyết “thi đấu cờ đồng đội”. Mọi người đều biết, trong thi đấu cờ vây, đấu thủ ở đẳng cấp thấp không thể thắng được đấu thủ đẳng cấp cao hơn. Giả sử tham dự thi đấu cờ vây có ba đội *A, B, C*, mỗi đội có ba kì thủ. Thực lực của mỗi đội có thể như sắp xếp ở Lạc thư. Đội *A* có một kì thủ cấp bốn, cấp chín và cấp hai; B có các kì thủ ở các đẳng cấp cấp ba, cấp năm và cấp bảy; Đội *C* có các kì thủ ở các đẳng cấp cấp sáu, cấp một và cấp sáu. Nếu các cuộc thi đấu theo thể thức thi đấu vòng tròn thì cần phải tiến hành chín trận đấu mới phân thắng bại. Ta thử xem xét tình hình thi đấu của hai đội *A* và *B*. Theo như cách sắp xếp lực lượng như hình vẽ, *A* có thể thắng bốn trận còn *B* có thể thắng năm trận và như vậy *B* > *A*. Căn cứ lí luận tương tự ta thấy *C* > *B*. Theo tiên đề về đại lượng không bằng nhau trong toán học ta có *C* > A. Thế nhưng phân tích theo Lạc thư thì cũng dễ thấy *C* thắng bốn trận còn đội *A* thắng năm trận và ta có *A* > *C*, vì vậy ở đây không thể ứng dụng được tiên đề về đại lượng không bằng nhau.

Với sự phát triển của máy tính điện tử, ma trận lại có thêm một ý nghĩa mới. Trước mắt, đối với các mặt phân tích tổ hợp, lí thuyết đồ thị, trí tuệ nhân tạo ma trận đều có tác dụng to lớn. Hiệp hội máy tính Mỹ khi soạn thảo trợ giúp trật tự bộ nhớ (CACM) đã soạn thảo việc đưa ma trận vào việc tạo trình tự. Kiến trúc sư Bột La Đông đã phát hiện tính đối xứng hết sức phong phú của các ma trận, trong đó có nhiều đồ án rất đẹp, có thể sử dụng vào các ngành công nghiệp nhẹ, trong thiết kế các bao bì.

Ma trận ngày càng được người ta coi trọng. Ở nước ngoài đã xuất bản một cuốn sách nổi tiếng là “Đại số học hiện đại và ứng dụng” cuốn sách đã mở ra lĩnh vực chuyên môn mà trước đây người ta cho là trò tỉa tót vô bổ.

Từ khoá: *Hình vuông ảo; Đồ thị hai chiều..*

90. Làm thế nào để tạo nên một ma trận?

Trên đây chúng ta đã biết thế nào là ma trận nhưng làm thế nào để tạo nên một ma trận cấp *n*. Dưới đây xin giới thiệu phương pháp tạo nên một ma trận cấp lẻ. Ma trận này do Loblai thiết lập vào thế kỉ XVII. Hình phía bên phải trình bày phương pháp cấu tạo ma trận cấp bảy. Dưới đây là các bước làm cụ thể.

Bước thứ nhất: Đặt số 1 vào ô chính giữa của hàng trên cùng.

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

Bước thứ hai: Chiếu theo thứ tự các số tự nhiên, số lớn đặt ở ô vuông phía bên phải liền hàng trên, ví dụ số 3 phải ở ô vuông bên phải phía trên số 2, số 4 ở ô vuông bên phải phía trên số 3. Thế nhưng khi gặp tình hình dưới đây ta phải thay đổi:

1. Nếu số *a* đã ở hàng trên cùng, thì *a +1* phải đặt ở hàng dưới cùng thuộc cột liền phía bên phải. Như số 2 phải đặt ở hàng cuối cột bên phải cột có số 1, số 11 ở hàng cuối của cột phía phải liền với cột số 10.

2. Nếu *b* đã đặt ở ô cực bên phải của một hàng thì số *b +1* phải đặt ở ô cực bên trái của hàng phía trên. Ví dụ số 4 đã đặt ở cực bên phải của một hàng, thì số 5 phải đặt ở vị trí cực bên trái của hàng liền phía trên. Ví dụ vị trí các số 12 và số 13.

3. Khi đã đến ô vuông góc trên bên phải hoặc đến ô vuông mà ô phía trên đã có con số chiếm giữ thì đặt con số lớn hơn vào ô ở cùng cột liền phía dưới. Như với các ô 29 và 28, số 8 và số 7.

Theo quy tắc đã mô tả ở trên ta có thể nhận được ma trận cấp bảy. Bạn thử dùng quy tắc này để tạo nên các ma trận cấp năm, cấp chín, cấp mười một.

Từ khoá: *Ma trận (ma trận vuông).*

Truyền thuyết xưa kể lại rằng: Có một thuật sĩ đã phát minh cho quốc vương nọ một bàn cờ và cách chơi cờ hết sức lí thú. Nhà vua muốn thưởng cho thuật sĩ một phần thưởng và ra đặc ân để thuật sĩ tự chọn lấy một phần thưởng. Thuật sĩ đưa ra yêu cầu trên ô thứ nhất để một hạt lúa, ô thứ hai để hai hạt lúa, ô thứ ba để bốn hạt lúa và cứ thế ô sau để số hạt lúa gấp đôi ô đứng trước cho đến hết 64 ô. Nhà vua cho rằng số lúa không đáng là bao nhiêu nên thuận miệng chấp nhận. Ai ngờ khi nhờ người tính lại mới thấy số lúa của quốc vương còn xa mới đủ để cho vào 64 ô.



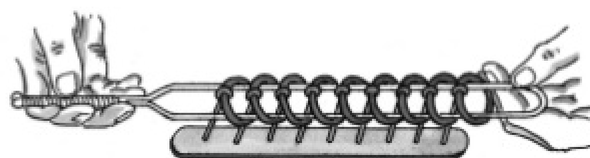
Tại sao vậy? Sự thực thì theo cách đó quốc vương phải trả cho thuật sĩ bao nhiêu lúa?

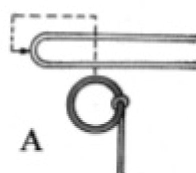
Ta thử tính xem là bao nhiêu. Ô thứ nhất một hạt lúa, ô thứ hai 2 hạt lúa, tổng số lúa hai ô là 3 hạt tức là $2 \times 2 - 1 = 2^2 - 1$. Ô thứ ba là 4 hạt, tổng số hạt lúa của cả ba ô là 7 hạt tức $2 \times 2 \times 2 - 1 = 2^3 - 1$. Ô thứ tư có 8 hạt và tổng số hạt lúa của cả bốn ô là 15 hạt tức $2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1 = 2^4 - 1$. Và tổng số các hạt lúa từ ô thứ nhất đến ô thứ 64 là $2^{64} - 1 = 18446744073709551615$.

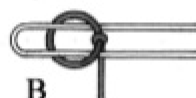
Vì sao con số này lại lớn đến kinh người như vậy? Nguyên do là vị thuật sĩ thông minh này đã dùng cấp số nhân trong toán học với công bội bằng 2 và lấy số ô của bàn cờ làm bậc của luỹ thừa. Cấp số nhân đã xuất phát từ 1 hạt lúa, 2 hạt lúa nhanh chóng biến thành con số khổng lồ khó tưởng tượng nổi. Vị quốc vương có ít kiến thức toán học làm thế nào có thể hiểu được tính chất kì diệu của cấp số nhân.

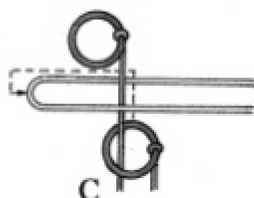
Từ khoá: *Cấp số nhân.*

Chuỗi chín vòng là trò chơi dân gian cổ của Trung Quốc thịnh hành vào đời nhà Minh, Nhà Thanh, ở nước người ta gọi đó vòng Trung Quốc "Chinese ring". Không có tài liệu nào nói về xuất xứ, thời điểm xuất hiện của chuỗi chín vòng. Nhà toán học nổi tiếng Cardan đã từng đề cập đến chuỗi chín vòng. Nhà toán học Wallis cũng đã có các phân tích tinh tế.











Chuỗi chín vòng có cấu tạo như sau: Đó là chuỗi có chín vòng tròn, mỗi vòng đều có cán thẳng (thường bằng dây thép), xuyên qua vòng sau và xuyên qua một lỗ nhỏ trên một tấm gỗ (hay thép). Đầu dưới mỗi cán có một vòng nhỏ để khi chuyển động lên xuống cán không tuột ra khỏi tấm gỗ. Ngoài ra còn có một chạc bằng dây thép.

Mục đích trò chơi là xâu lần lượt chín cái vòng vào cái chạc hoặc tháo chín cái vòng đã xâu. Xâu vào hoặc tháo ra đều không dễ mà phải làm mấy trăm động tác theo một quy luật nhất định, tức phải có một thuật toán.

Trước hết xin giới thiệu các động tác cơ bản.

Nếu muốn xâu vòng vào kẹp trước hết phải đưa vòng từ dưới lên trên qua tâm chạc (theo đường nét đứt trong hình A) rồi xâu vào đầu chạc như hình B. Động tác này trừ vòng thứ nhất thực hiện khá dễ dàng còn các vòng sau do bị vướng các vòng khác nên không thể thực hiện một cách trực tiếp. Nhưng có điều cần chú ý là: nếu chiếc vòng sát ngay trước đã xâu vào chạc mà không vướng vòng nào khác nữa phía trước, thì chỉ cần nâng vòng đó lên tạm thời (như hình *C*) và vòng sau có thể xâu vào được, sau đó đưa vòng trước trở về vị trí cũ (xem hình *D*). Còn nếu để tháo các vòng ta chỉ cần làm các bước ngược lại khi xâu vòng.

Sau khi nắm được hai động tác cơ bản, phải luyện tập nhiều lần mới có thể xâu vào tháo ra tuỳ ý được. Bây giờ ta thấy, nếu chỉ xâu vòng thứ nhất thì chỉ cần một bước là được. Muốn xâu hai vòng (thứ nhất và thứ hai) phải xâu vòng thứ nhất trước rồi mới xâu vòng thứ hai, vì vậy phải thực hiện hai bước. Muốn xâu ba vòng thì phức tạp hơn.

Trước hết phải xâu được vòng thứ nhất và vòng thứ hai, rồi lại phải tháo vòng thứ nhất ra mới xâu được vòng thứ ba, sau cùng phải xâu lại vòng thứ nhất. Như vậy vẫn phải thực hiện năm bước.

Khi số vòng cần xâu càng nhiều thì các bước cần phải thực hiện càng nhiều, nếu không chú ý thì sẽ bị nhầm và rối loạn toàn bộ. Từ thời xưa người ta đã nghĩ đến điều đó và đặt ra một câu vè nêu các bước cần thiết khi tháo lắp vòng: Cứ tám bước là một khâu, trong đó bảy bước trước phải theo là: "một hai một ba một hai một (còn "lên" hay "xuống" là tuỳ tình hình: Tức chưa ở trên chạc thì "lên", đã ở trên chạc thì "xuống"). Bước thứ tám thì tuỳ tình hình đầu chạc mà quyết định. Nếu đã có hai vòng liền nhau rồi thì nhất định phải tháo vòng sau ra, nếu chỉ có một vòng, nhất định phải xâu vòng sau lên. Toàn bộ sự khéo léo đều bao gồm trong câu vè trên đây. Theo ba câu vè, để

cởi hoặc lắp chín cái vòng cần đến 431 bước, nhưng thực ra cũng không tốn nhiều sức khi đã thuộc và quen các thao tác.

Vào năm 1975 xuất hiện một quyển sách chuyên môn, bên trong có một chuỗi số 1, 2, 5, 10, 21, 42, 85, 170, 341.

Chuỗi số không phải là cấp số cộng, cũng không phải là cấp số nhân? Thực ra đó là chuỗi số gì? Đó chính là “chuỗi số chín vòng”, con số *n* chỉ số bước cần thực hiện khi số vòng cần tháo, gỡ càng tăng.

Thế các số xuất hiện có theo quy luật không? Qua nghiên cứu người ta tìm thấy quy luật lập dãy số. Nếu kí hiệu U_n là số hạng thứ *n* trong dãy số, ta có công thức:

Nếu n là số chẵn thì $U_n = 2U_{n-1}$

Nếu n là số lẻ thì $U_n = 2U_{n-1}+1$

Theo công thức trên rõ ràng nếu có U_1, nhất định sẽ tính được U_2, U_3... Người ta gọi cách suy luận trên đây là phương pháp “đệ quy”. Ngoài ra còn có công thức tính trực tiếp U_n như sau:

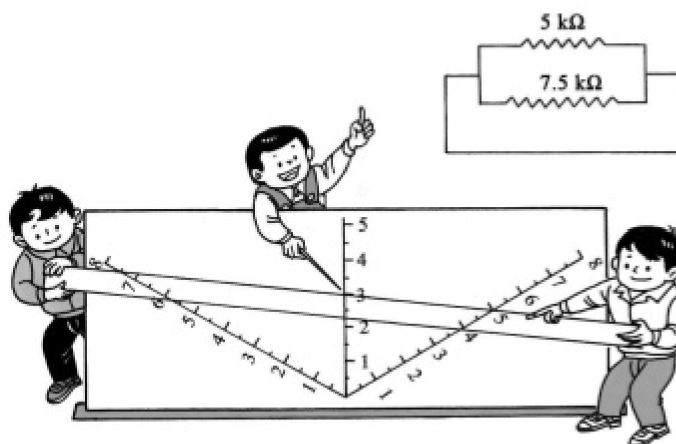
$$U_n = \begin{cases} \frac{1}{3}(2^{n+1} - 1) & \text{khi } n \text{ là số lẻ} \\ \frac{1}{3}(2^{n+1} - 2 & \text{khi } n \text{ là số chẵn} \end{cases}$$

Từ khoá: *Chuỗi chín vòng, chuỗi số chín vòng.*

Mời bạn trả lời câu hỏi sau đây: 10 ^{0}C (bách phân) tương đương với bao nhiêu độ Fahreheit. Thông thường, để trả lời câu hỏi này bạn phải biết mối quan hệ giữa nhiệt độ C và nhiệt độ F:

$$F = {}^{9}/_{5}C + 32$$

Thay $C = 10$ vào công thức ta tính được $F = 50$. Thế nhưng nếu bạn dùng loại nhiệt kế có chia độ theo nhiệt độ F bạn có thể đọc trực tiếp kết quả. Nhưng cũng có thể sử dụng phương pháp tính toán nhờ các hệ đường đặc biệt gọi là toán đồ thì sẽ vô cùng thuận tiện: Nhờ toán đồ ta không phải dùng công thức tính toán mà đọc được kết quả trực tiếp trên toán đồ. Đó là ưu điểm nổi bật của phương pháp toán đồ. Toán đồ dùng cho nhiệt kế là loại toán đồ đơn giản nhất, người ta cũng gọi là đồ thị Nômô.



Ta hãy xét một ví dụ khác: Khi đấu song song hai điện trở 5 kΩ và 7,5 kΩ, tính điện trở tương đương của mạch đó?

Ta tính điện trở tương đương theo công thức:

$^1/_R = {}^1/_{R_1} + {}^1/_{R_2}$ và có thể tính được ngay R = 3 KΩ.

Thế liệu có thể thiết lập một toán đồ để tính không?

Trước hết ta vẽ một góc 120^0 và đường phân giác của góc. Chia độ với đơn vị dài như nhau trên hai cạnh và trên phân giác, ta được một toán đồ đơn giản. Khi sử dụng chỉ cần dùng thước nối hai điểm 7,5 và 5 trên hai cạnh. Đường thẳng cắt phân giác tại điểm nào, đó chính là giá trị *R* cần tìm. Theo đồ thị ta có thể tìm thấy *R = 3*.

Chắc các bạn cũng sẽ chú ý một điều là khi đọc trên đồ thị loại này thì việc đọc các số lẻ khó chính xác, vì vậy giá trị tìm được chỉ là gần đúng. Nhưng trong thực tế thì các giá trị gần đúng này cũng đủ để làm việc.

Từ khoá: *Phương pháp toán đồ; Đồ thị Nômô.*

Sông Hoàng Phố chảy qua thành phố Thượng Hải, chia Thượng hải thành hai phần là Phố Đông và Phố Tây. Vào đầu những năm 90, Trung ương quyết định phát triển Phố Đông, Phố Đông mỗi ngày một đổi thay. Một khu phố mới hiện đại đã hiển hiện uy nghi.

Để giải quyết được khâu giao thông ngày càng dày đặc giữa Phố Tây và Phố Đông, người ta đã lần lượt xây dựng các đường hầm qua sông như đường hầm Phố Lộ, Đông Lộ... cùng những chiếc cầu lớn bắc qua hai bờ như cầu Nam Phố, Dương Phố... trên sông Hoàng Phố. Trước ngày 1 tháng 5 năm 2000, ô tô qua cầu phải thu phí. Những người dân sống ở Thường Hải đều có kinh nghiệm: Ô tô đi từ Phố Tây sang Phố Đông, bất kể là đi trên cầu hay dưới đường hầm, được thông một lèo; nhưng, nếu đi từ Phố Đông sang Phố Tây, thì nhất định phải qua trạm thu phí, nộp phí xong mới được đi.

Xây cầu và đường hầm phải tốn một khoản tiền cực lớn, thu phí là để bù đắp, mọi người đều thấy hợp lí. Nhưng, vì sao chỉ đặt cửa thu phí ở Phố Đông mà không có của thu phí đặt ở Phố Tây, cả đi lẫn về đều thu phí cơ mà? Lập luận thực ra hết sức đơn giản, với xe cộ (chỉ trừ một số rất ít xe quá cảnh xong không quay trở lại), khi đã lái qua cầu rồi thì bao giờ cũng quay về (đương nhiên

cũng có thể đi qua theo ngả đường này, quay về theo ngả đường kia, hoặc hôm nay đi qua sông rồi đến mấy ngày sau mới quay lại). Bất kể là chỉ đặt cửa thu phí một chiều trên sông rồi thu phí qua sông khứ hồi, hay là đặt cửa thu phí cả hai chiều trên sông rồi thu phí qua sông riêng từng chiều, thì với xe cộ, phí cần phải nộp là như nhau; với cơ quan thu phí, tổng lượng thu phí cũng như nhau. Nghĩa là, chỉ cần đặt cửa thu phí một chiều trên sông là cũng có thể đạt được hiệu quả thu phí tương tự với đặt cửa thu phí hai chiều trên sông. Song, nếu chỉ đặt cửa thu phí một chiều thì sẽ tiết kiệm được một nửa chi phí dành cho xây dựng cửa thu phí và vận doanh thường ngày.

Lập luận mà mọi người đều có thể hiểu được trên đây thực ra là một ví dụ của nguyên tắc đối ngẫu trong toán học. Nguyên tắc đối ngẫu là một quan hệ đối ứng 1-1 nào đó được thiết lập giữa hai nguyên tố (chẳng hạn tập hợp xe cộ từ Phố Tây sang Phố Đông và tập hợp xe cộ từ Phố Đông sang Phố Tây), chứng tỏ các số nguyên tố nằm trong hai tập hợp là như nhau.

Nguyên tắc đối ngẫu tuy đơn giản, nhưng lại là một căn cứ suy luận hết sức quan trọng, nếu suy rộng ra cho các tập hợp vô hạn, thì sẽ lập được lí thuyết cơ số của tập hợp.

Dùng nguyên tắc đối ngẫu còn có thể giải quyết được các nan đề toán học nổi tiếng trong lịch sử, ví dụ như Bài toán đi vòng quanh đường vành đai.

Bài toán như sau: Trên đường vành đai có *n* bến xe, với độ cao so với mực nước biển lần lượt là 100m và 200m, cho biết nếu độ cao của hai bến xe cạnh nhau là như nhau, thì đường quốc lộ nối liền chúng là hoàn toàn bằng phẳng. Có hành khách xuất phát từ một bến xe nào đó thử đi một vòng quanh đường vành đai, phát hiện thấy số đoạn đường dốc và số đoạn đường hoàn toàn bằng phẳng là như nhau, thế là anh ta kết luận: *n* số bến xe là bội số của 4.

Lí do rất đơn giản: Theo điều kiện giả thiết, mỗi một đoạn đường dốc sẽ hoặc là từ độ cao 100m lên độ cao 200m, hoặc là từ độ cao 200m xuống độ cao 100m. Đi thử quanh đường vành đai một vòng, có thể thiết lập sự đối ứng 1-1 giữa các đoạn lên dốc với các đoạn xuống dốc đã đi, nếu không thì sẽ không thể quay được về độ cao ban đầu. Vì thế, nếu đoạn lên dốc có *m* đoạn, thì đoạn xuống dốc cũng có m đoạn, từ đó có số đoạn đường dốc $k = 2m$ là số chẵn; bây giờ lại cho biết số đoạn đường hoàn toàn bằng phẳng cũng là k, cho nên tổng số các đoạn đường là $2k = 4m$. Hiển nhiên tổng số đoạn đường chính là số bến xe, cho nên số bến xe $n = 4m$ là bội số của 4.

Từ khóa: *Nguyên lý đối ngẫu.*

Chắc nhiều người đã quen dùng giấy ráp để đánh bóng các đồ vật. Giấy ráp là loại giấy trên mặt giấy có trải một lớp cát, bề mặt giấy thô ráp, nhưng khi dùng giấy ráp xát lên các vật có bề mặt phẳng thì bề mặt đồ vật sẽ sáng loáng. Thế tại sao giấy ráp lại mài bóng được bề mặt?

Điều này liên quan đến bài toán thống kê.

Ta chia bề mặt vật thể bị mài bóng thành những khối lồi lõm nhỏ. Khi cho giấy ráp chà xát lên vật thể một lần. Mỗi khối nhỏ trên bề mặt vật thể có thể bị hạt cát mài mòn bớt một ít, ta kí hiệu phần bị mài này là 1, và cũng có thể không bị mài mòn, kí hiệu là 0. Khả năng chỗ lồi nhỏ bị mài mòn và không bị mài mòn là như nhau. Mỗi chỗ lồi trên bề mặt vật thể có thể bị mài mòn hoặc khi bị mài mòn theo bốn khả năng khi bị mài một lần

$$(0, 0)\ (0, 1)\ (1, 0)\ (1, 1)$$

tức mài đi một bộ phận của 0, mài một bộ phận nhỏ của 1 hoặc 2. Khả năng của các trường hợp tương ứng là . Qua ba lần mài thì có thể có các khả năng

(0, 0, 0) (0, 0, 1) (0, 1, 0) (0, 1, 1)

(1, 0, 0) (1, 0, 1) (1, 1,0) (1, 1, 1)

Như vậy qua ba lần chà xát có các khả năng không bị mài mòn là 0, bị mài mòn một chỗ, bị mài mòn hai và bị mài mòn ở ba chỗ, các khả năng cho mỗi trường hợp tương ứng là $^1/_8$;$^3/_8$;$^3/_8$và $^1/_8$. Qua sự ma sát của n hạt cát, mỗi chỗ lồi trên bề mặt vật thể cũng có 2^n loại trường hợp, và mỗi loại trường hợp là có khả năng như nhau. Như vậy các chỗ lồi bị mài mòn có thể là 0, 1,...*n* - 1, hoặc chỗ lồi n và khả năng n +1, mỗi loại trường hợp có khả năng $^1/_{2n}$,$^n/_{2n}$. Bởi vì khi bị hạt cát chà xát trung bình có $^1/_2$ chỗ lồi bị mài mòn, khi ma sát với *n* hạt cát thì trung bình có $^n/_2$ chỗ lồi bị mài. Đứng về khả năng bị mài mòn thì khả năng $^n/_2$ chỗ lồi bị mài mòn là khá lớn. Ví như khi *n* = 10 thì khả năng có 4 đến 6 chỗ lồi bị mài mòn là $^{672}/_{1024}$. Khi *n* = 10.000 thì khả năng có 4900 - 5100 chỗ lồi bị mài mòn đến 84%, còn khả năng 4800 đến 5200 chỗ lồi bị mài mòn đến 99,54%.

Do trên một tờ giấy ráp có vô số hạt cát, nên qua một lần bị chà xát, các chỗ lồi trên bề mặt bị nhiều hạt cát mài mòn, sau nhiều lần chà xát thì n rất lớn. Mà mỗi chỗ lồi lại hết sức nhỏ, nên số ma sát của các hạt cát là không đếm được. Vì vậy giấy ráp có thể đánh bóng được các bề mặt vật thể.

ởcác đô thị, thành phố lớn, ở các địa phương dân cư đông đúc, số hộ cư dân lớn, đòi hỏi số thuê bao điện thoại lớn, ở nhiều thành phố lớn số thuê bao điện thoại lên đến bảy, tám chữ số. Ta thử tính với các số điện thoại đến bảy, tám chữ số có thể được sử dụng cho bao nhiêu thuê bao.

Các mã số điện thoại thường chọn trong các số từ 0 đến 9 tổ hợp lại mà thành, chữ số đầu tiên của một số điện thoại không thể là số 0. Nếu dùng số có bảy chữ số làm số thuê bao điện thoại thì chữ số đầu có thể là các số từ 1 đến 9 cho



nên 9 loại chọn lựa khác nhau trong việc chọn chữ số đầu. Bắt đầu từ chữ số thứ hai trở đi, người ta có thể được chọn trong các số từ 0 đến 9, và các chữ số này có thể lặp đi, lặp lại nhiều lần nên chọn các chữ số trong sáu chữ số liên tiếp sau là 10 loại và khả năng tạo các tổ hợp để chọn số điện thoại 9×10^6. ứng dụng phương pháp tương tự ta có thể tính số điện thoại có 8 chữ số là 9×10^7.

Và từ số điện thoại có 7 chữ số tăng đến 8 chữ số thì số thuê bao được tăng thêm sẽ là

$9 \times 10^7 - 8 \times 10^6 = 8{,}1 \times 10^7$

Vì vậy khi tăng số điện thoại từ bảy chữ số đến tám chữ số thì số thuê bao tăng lên tối đa đến 81 triệu số.

Thực tế thì số điện thoại tăng lên có thể không nhiều đến như vậy vì có thể có các số thuê bao bắt đầu từ số 1 như các số 110, 114, 119... có thể dành riêng để sử dụng vào các mục đích đặc biệt nên số thuê bao tăng thêm cũng không đến 81 triệu.

Trong cuộc sống hàng ngày người ta thường có yêu cầu ước lượng các sản phẩm nông nghiệp, ví dụ ước lượng sản lượng lúa. Người ta thường dùng biện pháp là thu hoạch sản phẩm trong một phần nhỏ diện tích, ví dụ trong $^1/_{10}$ mẫu, sau khi đo sản lượng thu được trong phần nhỏ diện tích, người ta có thể tính cho diện tích lớn ví dụ nhân với 10 để được sản lượng cho một mẫu v.v.. Để giảm bớt sai số khi ước lượng, người ta thường chọn các mảnh ruộng khai thác ở nhiều chỗ khác nhau, sau đó lấy trung bình và tính sản lượng cho một vùng lớn.

Việc ước lượng sản lượng lúa cho một vùng thường có sai số không lớn so với sản lượng thực. Thế nhưng khi cần tính ước lượng số cá trong một cái ao, người ta không thể dùng phương pháp như khi ước lượng sản lượng lúa. Bởi vì cá bơi lội khắp nơi và ở các nơi khác nhau trong ao sẽ có số cá khác nhau, cũng không thể bắt toàn bộ số cá trong ao để đếm. Như vậy làm thế nào để ước lượng số cá trong ao? Có một cách hết sức khéo léo để ước lượng số cá trong ao.

Trước hết người ta bắt một số cá bất kì trong ao ví dụ 100 con. Sau đó đánh dấu rồi lại thả xuống ao. Sau một thời gian người ta có thể nhận biết được số cá đánh dấu phân bố như thế nào trong bầy cá ở trong ao. Muốn làm được việc đó



ta lại bắt một số cá ví dụ 50 con, rồi tìm số cá được đánh dấu trong số đó, ví dụ trong số 50 con đã bắt có hai con bị đánh dấu, tức tỉ lệ số cá bị đánh dấu trong số cá bắt ở lần này là $^2/_{50}$. Vậy tổng số cá trong ao tính theo tỉ lệ này so với số cá đã đánh dấu sẽ là 100: $^2/_{50}$= 2500 con. Và cá trong ao có thể ước tính là 2500 con.

Để giảm bớt sai lầm khi ước lượng, người ta có thể chọn các thời gian khác nhau, ở các địa điểm khác nhau để bắt một số cá và tìm số cá đã đánh dấu trong mỗi lô cá đã bắt. Ví dụ có năm lần

bắt cá ở các vị trí khác nhau và thu được các tỉ lệ số cá đánh dấu là:

$^{2}/_{50}$,$^{3}/_{70}$,$^{5}/_{100}$,$^{3}/_{80}$ và $^{4}/_{75}$

và

Tỉ lệ trung bình trong năm lần bắt cá là:

$$\frac{1}{5}\left(\frac{2}{50}+\frac{3}{70}+\frac{5}{100}+\frac{3}{80}+\frac{4}{75}\right) \oplus 0{,}047.$$

Và số cá trong ao sẽ là 100 : 0,047 ≈ 2237 con

Vậy số cá có trong ao ước có 2237 con.

Nếu có người hỏi bạn "một người cao 1,50 m có thể bị chết đuối trong hồ sâu 1 m hay không?". Nhất định bạn sẽ trả lời: không. Thế nhưng lại đặt câu hỏi "một người cao 1,5 m có bị chết đuối trong hồ nước có độ sâu trung bình một mét không?" Bạn có thể trả lời không thể được không? Rõ ràng là không thể.

Việc trả lời câu hỏi này có liên quan đến khái niệm trung bình. Khi ta chọn một nhóm số, gọi số trung bình là trung bình cộng của các số. Ví dụ cho nhóm số 3, 4, 5 thì số trung bình chính là

$$^{(3+4+5)}/_{3} = 4$$

Số trung bình có giá trị lớn hơn số nhỏ nhất nhưng lại nhỏ hơn số lớn nhất.



Vì vậy nói độ sâu trung bình của hồ nước là một mét thì ở chỗ cạn nhất có thể có độ sâu nhỏ hơn một mét nhưng chỗ sâu nhất có thể lớn hơn 1,5 m. Vì vậy một người cao 1,5 m khi rơi vào chỗ sâu nhất có thể bị ngập đầu và có nguy cơ bị chết đuối.

Trong cuộc sống thường ngày chúng ta thường gặp khái niệm số trung bình. Ví dụ khi nói tuổi thọ trung bình của một thành phố là 70 tuổi mà có người sống quá 80 tuổi, cũng có người sống

chưa đến 40 tuổi.

Từ khoá: *Số trung bình.*

Khi chúng ta đi học, đi làm việc, đi mua hàng, ta thường phải đi xe công cộng. Có người ở gần bến xe, có người ở xa. Vậy nên đặt bến xe ở địa điểm nào là tốt nhất? Việc bố trí các bến xe phải dựa trên nguyên tắc nào?

Việc bố trí bến xe tại địa điểm nào dĩ nhiên không thể thuận tiện cho tất cả mọi người. Việc chọn địa điểm của bến xe phải dựa trên nguyên tắc là thuận tiện cho số đông người đi xe.

Ta thử xem xét một ví dụ đơn giản nhất: Đặt một bến xe trên đường giữa hai đầu một đoạn đường *A, B* ở mỗi điểm đầu có một xưởng máy. Hàng ngày có 20 người và 30 người đi làm việc bằng xe tương ứng cho mỗi nhà máy. Cần bố trí một bến xe giữa hai nhà máy, xét xem cần bố trí bến xe ở địa điểm nào để cho người đi xe cảm thấy thuận tiện, và mỗi người đi xe khi đi làm việc bằng xe công cộng (từ bến xe đến nhà máy) là ngắn nhất. Giả sử bến xe đặt ở điểm *C* cách *A* là *x m* ($0 \le x \le a$) và cách B là *a - x* mét, *a* là khoảng cách giữa hai điểm *A* và *B*. Nếu S là tổng đoạn đường đi của toàn bộ công nhân ở hai nhà máy thì

$$S = x \times 10 + (a - x) \times 30 = 30a - 10x$$

S càng bé nếu *x* càng lớn, tức là *C* phải cách điểm *A* lớn nhất, khi ấy điểm *C* trùng với *B*, nghĩa là bến xe đặt ở ngang cổng nhà máy *B* là tốt nhất.

Từ kết luận trên có thể thấy nguyên tắc chung là bến xe nên bố trí ở nơi nào có người đi xe nhiều nhất. Nếu đường đi không phải ở gần chỉ hai nhà máy (hoặc trường học) mà có thể nhiều hơn thì nguyên tắc giải quyết cũng tương tự. Chúng ta thử xét một ví dụ phức tạp hơn một chút. Giả sử con đường nối năm nhà máy *A, B, C, D, E*. Mỗi ngày ở mỗi nhà máy tương ứng có 25, 30, 20, 17, 20 công nhân cần đi xe đến chỗ làm việc. Vậy bến xe phải đặt tại điểm *F* nào đó là tốt nhất?

Phương pháp tính toán như sau:

Trước hết ta tính tổng số người cần đi xe P và nửa số người đó là $^P/_2$.

$$P = 25 + 30 + 20 + 17 + 20 = 112 \text{ người}$$

$$^P/_2 = 56 \text{ người}$$

Sau đó tính toán tổng các công nhân cần đi xe rồi so sánh với số .

Số người ở nhà máy *A* là 25 < 56.

Số người ở các nhà máy *A, B* là 25 + 30 = 55 <56.

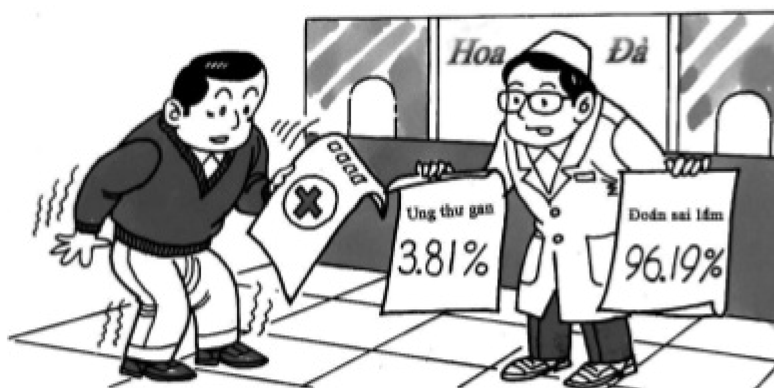
Số người ở 3 nhà máy *A + B + C* là 25 + 30 + 20 = 75 > 56.

Số người ở nhà máy *A* cần đi xe nhỏ hơn một nửa số người cần đi xe nói chung, tức số người đi

xe ở nhà máy *A* nhỏ hơn tổng số người đi xe ở 4 nhà máy *B, C, D, E* cộng lại, như vậy bến xe cần đặt gần hơn về hướng 4 nhà máy *B, C, D, E*. Mặt khác tổng số người cần đi xe ở hai nhà máy *A* và *B* nhỏ hơn một nửa số người cần đi xe, nên bến xe nên bố trí ở gần hơn về phía nhà máy *C, D, E*; mà tổng số người đi xe ở ba nhà máy *A, B, C* lớn hơn một nửa số người cần đi xe nên bến xe nên đặt ở gần hơn về phía ba nhà máy *A, B, C*. Theo các trật tự ưu tiên nêu trên thì bến xe vừa phải gần về phía nhà máy A, B, C lại vừa phải gần ba nhà máy *C, D, E*, vì vậy địa điểm bến xe tốt nhất là tại điểm *C*, là ở cổng nhà máy *C*.

Ở những nước có hệ thống y tế tiên tiến, để sớm chẩn đoán và điều trị bệnh, người ta thường tổ chức kiểm tra định kì bệnh ung thư. Kết quả các lần kiểm tra, có người có thể phản ứng dương tính về bệnh ung thư, liệu có phải những người này có thể thực sự bị ung thư không?

Thực ra trong mỗi đợt kiểm tra hoặc nhiều hoặc ít đều có thể có sai lầm. Ở đây có thể có hai loại sai lầm: Một loại là đối tượng kiểm tra thực tế không có bệnh nhưng kết quả kiểm tra lại cho biết là có bệnh (phản ứng dương tính), đây là loại sai lầm phóng đại kết quả. Một loại sai lầm khác là đối tượng kiểm tra thực tế có bệnh, nhưng kết quả kiểm tra lại báo không có bệnh (phản ứng âm tính), đây là loại sai lầm giảm nhỏ kết quả. Người bị kiểm tra dương tính có thể thực sự bị bệnh nhưng có thể không do mắc sai lầm phóng đại kết quả. Tương tự với người qua kiểm tra cho phản ứng âm tính có thể thực sự không bị bệnh hoặc có thể là người thực sự có bệnh nhưng kết quả báo sai do việc kiểm tra mắc phải sai lầm giảm nhỏ kết quả.



Thế khả năng mắc hai loại sai lầm như vừa nêu trên có lớn không? Giả sử ở một cơ sở y tế nào đó sử dụng phương pháp kiểm tra ung thư gan, độ tin cậy của phương pháp kiểm tra là 99%, như vậy ở đây khả năng xuất hiện kết luận sai là 1%. Nên nếu người nào đó có kết quả kiểm tra dương tính thì khả năng mắc bệnh của người đó lớn không?

Theo ước tính thường thì tỉ lệ người phát bệnh ung thư là 0,04%. Giả thiết đợt kiểm tra thực hiện trên tổng số một triệu người, khả năng số người mắc bệnh ung thư trong số đó có thể đến 400 người, số người không mắc bệnh ước khoảng 999.600 người. Nhưng độ tin cậy của phương pháp kiểm tra là 99%, nên trong số 400 người ung thư gan 400 x 99% = 396 người kiểm tra dương tính và kiểm tra âm tính là bốn người. Còn trong số người không bị ung thư số người kiểm tra cho kết quả dương tính là 999.600 x $^{1}/_{100}$ = 9996 người (do sai lầm), còn lại thì cho kết quả âm tính. Kết quả là số người kiểm tra cho kết quả dương tính là 396 + 9996 = 10392 người, trong đó số người thực sự bị ung thư chỉ là 396 người, chiếm 3,81% số người kiểm tra cho kết quả dương tính. Nói cách khác, trong số người kiểm tra cho kết quả dương tính, thực sự ước khoảng 3,81% thực sự bị ung thư. Như vậy do sai lầm phóng đại kết quả làm cho các phán đoán bị lệch lạc.

Vì vậy những người qua kiểm tra cho kết quả dương tính không nên hoang mang. Cho dù phương pháp kiểm tra không có sai lầm, độ tin cậy rất cao, nhưng ở những người có kết quả kiểm tra dương tính khả năng mắc bệnh ung thư cũng không phải là quá lớn.

Từ khoá: *Sai lầm; Sai lầm phóng đại; Sai lầm giảm nhỏ.*

101. Làm thế nào để việc kiểm tra bệnh định kì ít tốn kém nhất?

Ở một số nước có nền y học tiên tiến thường có việc kiểm tra định kì một số bệnh xã hội. Một phương pháp kiểm tra bệnh thông thường là phương pháp thử máu. Thông qua việc thử máu có thể phát hiện sớm các loại bệnh viêm gan, tả, nhiễm trùng máu và nhiều bệnh khác, nhờ đó có thể chẩn đoán và chữa trị bệnh sớm.

Phương pháp thực hiện kiểm tra thường là: Các nhân viên y tế đến các điểm kiểm tra gọi mỗi người lấy một ít máu, ghi phiếu, nhân viên y tế đem về cơ quan kiểm tra, nghiên cứu, cuối cùng thông báo kết quả kiểm tra cho từng người được kiểm tra. Phương pháp kiểm tra này có hiệu quả, tuy nhiên quá trình kiểm tra khá tốn công sức. Liệu có phương pháp nào tiết kiệm được sức lực hay không? Câu trả lời là có. Chúng ta nêu lên một ví dụ để thuyết minh vấn đề này.

Ở một thành phố lớn nọ người ta lấy được một số lượng lớn mẫu máu trong một cuộc kiểm tra định kì. Để xử lí số lượng mẫu máu rất lớn này có thể có hai phương án: Phương án thông thường là tiến hành nghiên cứu từng mẫu máu. Phương án khác chia các mẫu máu thành từng nhóm, mỗi nhóm 100 mẫu. Sau đó từ mỗi nhóm lấy mỗi mẫu một lượng nhỏ máu (số lượng máu ít) đem trộn lẫn với nhau, sao đó tiến hành kiểm tra hỗn hợp máu đã trộn. Nếu kết quả kiểm tra trong mẫu hỗn hợp này là âm tính, chứng tỏ ở 100 mẫu máu vừa xét là không có mầm bệnh. Nếu kết quả kiểm tra mẫu máu hỗn hợp là dương tính (ví dụ bệnh viêm gan) thì trong nhóm máu đã chọn mẫu hỗn hợp ít nhất có một mẫu máu có mầm bệnh. Để kiểm tra mẫu máu nào có mầm bệnh trong 100 mẫu máu này phải tiến hành kiểm tra cụ thể từng mẫu máu trong nhóm này. Thế dùng phương án kiểm tra nào thì tốt hơn?

Nếu dùng phương án thứ nhất, phải thực hiện 100 lần kiểm tra cho mỗi nhóm mẫu máu; nếu dùng phương án hai thì có khả năng chỉ tiến hành một lần kiểm tra, hoặc có thể có khả năng phải làm 101 lần kiểm tra. Để làm phép so sánh, cần phải xem xét số lần trung bình cần tiến hành kiểm tra cho mỗi nhóm mẫu máu, nhờ đó mà trong hai loại phương án thì phương án nào phải thực hiện số lần kiểm tra nhiều hơn và nhiều hơn bao nhiêu lần?

Dựa vào số liệu kiểm tra sơ bộ trước đó (trước khi làm kiểm tra đại trà phải làm thí nghiệm kiểm tra cho một phạm vi nhỏ) và nhận được tỉ lệ viêm gan trung bình là 0,1%, tức cứ 1000 người có một người bị lây nhiễm bệnh viêm gan, hoặc có thể nói ở mỗi nhóm mẫu máu khả năng có 0,1% số mẫu máu có bệnh viêm gan. Vì vậy ở mỗi nhóm 100 mẫu máu khả năng để một mẫu máu không mang bệnh là:

$$(1 - 0{,}1\%)^{100} \approx 90{,}48\%.$$

và khả năng có mẫu máu mang bệnh là

$$1- 90{,}48\% = 9{,}52\%.$$

Vì vậy nếu dùng phương án kiểm tra hai thì số lần trung bình cần thực hiện cho một nhóm máu là:

$$1 \text{ x } 90{,}48\% + 101 \text{ x } 9{,}52\% = 10{,}52 \text{ lần.}$$

So với phương án đầu thì tiết kiệm được 89,48%. Nếu mỗi lần thử máu cần 10.000 đ thì để thử một triệu mẫu máu theo phương án một phải tốn đến 1,4 tỉ đồng, trong khi dùng phương án hai chỉ tốn 1.472.800 đ, như vậy so với phương án một thì tiết kiệm đến hơn 10 triệu đồng.

Trong thực tế, khi xét nghiệm máu theo phương án hai không nhất thiết phân chia thành

nhóm 100 mẫu máu, mà có thể chia thành nhóm, mỗi nhóm có 50 mẫu, 150 mẫu tuỳ số lượng mẫu máu đã thu thập được. Các bạn thử tính xem so với phương án một thì phương án hai tiết kiệm được bao nhiêu nếu số mẫu máu là 10.000 mẫu.

102. Làm thế nào để tính số lượt trận đấu cho thể thức thi đấu loại trực tiếp?

Giả sử ở trường bạn đang tổ chức một cuộc thi đấu cờ theo thể lệ đấu loại trực tiếp, ví dụ số người ghi tên thi đấu là 50, bạn có thể tính được số trận đấu để dựa vào đó bố trí lịch thi đấu, số đấu trường. Nếu bạn được giao tổ chức cuộc thi đấu, bạn có tính được không?

Bởi vì trận đấu chung kết chỉ xảy ra giữa hai người cuối cùng, hai người này lại chọn từ $2^2 = 4$ người trong trận đấu trước đó, mà bốn người này lại được chọn trực tiếp từ $3^3 = 8$ người trong cuộc đấu trước đó... Nếu số người ghi tên đúng bằng các luỹ thừa của 2 như 2, 4 (2^2), 8 (2^3), 16 (2^4), 32 (2^5)...thì chỉ cần theo số người ghi tên thành nhóm tiến hành thi đấu cho từng nhóm, sau đó loại dần từng bước là được. Giả sử số người ghi tên không đúng bằng luỹ thừa nguyên của 2 thì trong thi đấu có vòng được miễn. Nếu ta xếp 2 người một thi đấu ngay từ đầu thì sẽ có một số vòng được miễn thi đấu ở giai đoạn giữa hoặc giai đoạn cuối, mà các trận đấu ở giai đoạn này thường khá căng thẳng vì các đấu thủ ngày càng mạnh, cơ hội được miễn hay không, rõ ràng không bình đẳng. Để cho cơ hội tương đối đồng đều khiến thi đấu ngày càng sôi nổi, nói chung người ta thường miễn thi đấu ở vòng một. Vì 50 là trung gian giữa 32 (2^5) và 64 (26) mà 50 - 32 = 18 nên vòng đầu cần loại 18 đấu thủ, tức cần tiến hành thi đấu 18 trận đấu cho vòng đầu tức có 36 người tham gia thi đấu và 14 người miễn thi đấu. Sau loạt trận thi đấu ở vòng một sẽ loại 18 đấu thủ và còn lại 32 người. Từ vòng đấu thứ hai sẽ không còn trường hợp miễn thi đấu nữa. Và ở vòng hai sẽ có 16 trận đấu, vòng thứ ba có 8 trận đấu, vòng đấu thứ tư có bốn trận đấu, vòng đấu thứ năm sẽ có hai trận đấu. Vòng đấu thứ sáu sẽ là trận chung kết để giành chức vô địch. Vậy tổng cộng số các trận đấu sẽ là 18 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 49 trận so với số đấu thủ 50 thì nhỏ hơn 1.

Ta lại xét ví dụ về trận thi đấu quốc tế về bóng đá năm 1998 ở Pháp, tổng số có 32 đội bóng đá tham gia vòng chung kết giải bóng đá thế giới năm 1998. Phương thức thi đấu ở vòng chung kết chia làm hai giai đoạn. Giai đoạn đầu chia bảng, đấu vòng tròn tính điểm, sau đó theo thể thức đấu loại trực tiếp. Nếu tiến hành thi đấu theo thể thức đấu loại trực tiếp ngay từ vòng đầu thì phải xếp bao nhiêu trận đấu? Vì 32 chính bằng 2^5 nên tổng số các trận đấu theo thể thức đấu loại trực tiếp sẽ là 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31 trận, ít hơn số đội tham gia là 1.

Bây giờ ta xét trường hợp chung có *M* người tham gia thi đấu. Giả sử *M* lớn hơn 2^n và nhỏ hơn 2^{n+1}, thế thì cần n + 1 vòng thi đấu, trong đó số vòng thi đấu đầu tiên sẽ là M - 2n. Sau vòng đầu, số người còn chưa thi đấu sẽ là $M - (m - 2^n) = 2^n$. Trong n vòng thi đấu tiếp sau, tổng số các trận thi đấu sẽ là:

$$2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$$

$$= (2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2^3 + 2^2 + 2) + 1 \times (2 - 1)$$

$$= (2^n + 2n^{-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^3 + 2^2 + 2) - (2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2^3 + 2^2 + 2 + 1) = 2^{n-1}$$

Và tổng số các trận thi đấu sẽ là:

$$(M - 2^n) + 2^n - 1 = M - 1$$

Nghĩa là ít hơn số đội tham gia là 1.

Thực ra, trong mỗi trận thi đấu sẽ loại bỏ một đấu thủ. Trong M người tham gia thi đấu sẽ

chọn được 1 vô địch và loại bỏ M - 1 đấu thủ vì vậy số trận thi đấu là M - 1. Bạn hãy theo cách trình bày, tính số trận thi đấu bóng bàn có 158 đấu thủ nam và 96 đấu thủ nữ tham gia.

Từ khoá: *Thể thức đấu loại.*

103. Tính số trận thi đấu theo thể thức thi đấu vòng tròn một lượt như thế nào?

Dùng thể thức đấu loại trực tiếp số trận thi đấu tương đối ít, thời gian thi đấu ngắn. Khi số người ghi tên thi đấu nhiều thường dùng thể thức này. Thế nhưng thể thức thi đấu này có nhược điểm là nếu muốn đạt chức vô địch thì không được phép có trận thua giữa chừng. Vả lại nếu có trường hợp do bốc thăm, các đấu thủ mạnh gặp nhau trực tiếp quá sớm một số đội mạnh có thể bị loại quá sớm, nên làm cho á quân và các thứ bậc tiếp sau có khi có trình độ chưa phù hợp với trình độ thực tế. Vì vậy trong một số cuộc thi đấu giải đồng đội, số đơn vị ghi tên thi đấu không nhiều, người ta thường không dùng thể thức đấu loại trực tiếp mà dùng thể thức thi đấu khác: thể thức thi đấu vòng tròn.

Làm thế nào để tính số trận đấu theo thể thức thi đấu vòng tròn? Dưới đây ta sẽ xem một ví dụ, ví dụ ở một trường học có 15 lớp, mỗi lớp có một đội bóng tham gia thi đấu, nếu cuộc thi đấu được thi đấu theo thể thức thi đấu vòng tròn một lượt, xem xét cần tiến hành tổ chức bao nhiêu trận đấu?

Nếu dùng thể thức thi đấu vòng tròn một lượt, mỗi đội sẽ lần lượt thi đấu một trận với một đội khác. Nếu có 15 đội thi đấu, mỗi đội phải thi đấu với 14 đội khác, nên với 15 đội thi đấu sẽ có 15 x 14 trận đấu. Nhưng mỗi trận có hai đội thi đấu với nhau nên số trận đấu chỉ còn một nửa nên số trận đấu thực tế sẽ là $^{(15 \times 14)}/_{2} = 105$ trận.

Ta lại xét số trận đấu trong giải vô địch bóng đá thế giới năm 1998 ở Pháp. Vòng chung kết này có 32 đội tham gia. Nếu suốt từ đầu đến cuối đều thi đấu theo thể thức thi đấu vòng tròn thì số trận đấu phải tổ chức là $^{(32 \times 31)}/_{2} = 496$ trận.

Nói chung nếu cuộc thi đấu vòng tròn một lượt tính cho *n* đội tham gia thì số trận thi đấu sẽ là $^{n \times (n-1)}/_{2}$.

Như vậy số trận thi đấu sẽ rất nhiều, thời gian thi đấu sẽ rất dài. Vì vậy nhiều cuộc thi đấu thường tổ chức thi đấu kết hợp giữa hai thể thức: thi đấu vòng tròn và đấu loại trực tiếp. Giai đoạn đầu chia bảng đấu theo thể thức thi đấu vòng tròn cho từng bảng, sau đó ở giai đoạn hai người ta cho tiến hành thi đấu theo thể thức đấu loại trực tiếp.

Nếu với 15 đội thi đấu ta chia làm ba nhóm, mỗi nhóm năm đội.

Trong từng nhóm sẽ tổ chức thi đấu vòng tròn. Ta thử xem ở giai đoạn này cần phải tiến hành bao nhiêu trận đấu?

Từ ba nhóm thi đấu vòng tròn sẽ tìm được ba đội đầu bảng, ba đội đầu bảng này sẽ tiếp tục thi đấu vòng hai để chọn các á quân. Như vậy:

Trong vòng 1: $^{5 \times 4}/_{2} + ^{5 \times 4}/_{2} + ^{5 \times 4}/_{2} = 30$ trận.

Trong vòng 2: $^{3 \times 2}/_{2} = 3$ trận đấu

Tổng số các trận thi đấu sẽ là 30 + 3 = 33 trận.

Lại xét các trận thi đấu trong vòng chung kết vô địch bóng đá thế giới năm 1998. Trong vòng chung kết này có 32 đội tham gia thi đấu. Ở giai đoạn đầu, 32 đội được chia thành tám bảng, mỗi bảng có bốn đội. Trong mỗi bảng lại tiến hành thi đấu theo thể thức thi đấu vòng tròn một lượt. Như vậy ở vòng thứ nhất sẽ chọn được tám đội đầu bảng, ở vòng hai tám đội này lại tiến hành thi đấu để tìm các á quân. Như vậy số trận thi đấu ở giai đoạn đầu sẽ là:

Vòng đầu: $^{4 \times 3}/_{2}$ x 8 trận.

Vòng hai: tám đội đầu bảng sẽ thi đấu để chọn các đội á quân: $^{8 \times 7}/_{2} = 28$.

Xin mời các bạn ứng dụng phương pháp tương tự để tính số trận đấu của cuộc thi đấu vô địch bóng bàn với 26 đội nam và 15 đội nữ tham gia. Nếu dùng thể thức thi đấu vòng tròn một lượt. Nếu chia thành ba bảng. Các đội nam chia thành hai bảng mỗi bảng chín đội và một bảng tám đội, các đội nữ chia thành hai bảng mỗi bảng sáu đội và một bảng bảy đội.

Thực tế nhiều trận đấu đã kết hợp hai thể thức thi đấu.

Vòng chung kết bóng đá thế giới năm 1998, 32 đội thi đấu được chia thành tám bảng, trong mỗi bảng dùng thể thức thi đấu vòng tròn một lượt và tiến hành 48 trận thi đấu. Mỗi bảng lại chọn một đội đầu bảng và đội thứ hai tất cả có 16 đội. Dùng thể thức đấu loại trực tiếp để chọn tám đội mạnh. Sau đó lại chọn thể thức đấu loại trực tiếp tiến hành bốn trận đấu chọn ra bốn đội vào, lại dùng thể thức đấu loại trực tiếp tiến hành hai trận đấu để chọn hai đội mạnh nhất vào chung kết: đội vô địch và đội á quân. Ngoài ra người ta còn cho thi đấu một trận để chọn đội 3 và 4. Như vậy tổng số các trận đấu sẽ là 48 + 8 + 4 + 2+ 1 + 1 = 64 trận đấu.

Từ khoá: *Thể thức đấu loại trực tiếp;Thể thức thi đấu vòng tròn một lượt.*

104. Sắp xếp lịch thi đấu theo thể thức thi đấu vòng tròn như thế nào?

Chúng ta đã biết cách tính số trận đấu theo thể thức thi đấu vòng tròn. Thế nhưng việc sắp xếp lịch thi đấu thế nào để các đấu thủ có thể gặp các đấu thủ khác nhau trong các vòng đấu? Ta xem xét ví dụ về các đội nữ trong cuộc thi đấu bóng bàn trong đó có hai bảng: một bảng có sáu đội, một bảng bảy đội. Ta thử sắp xếp lịch thi đấu cho bảng có sáu đội, sáu đội này thi đấu theo thể thức đấu vòng tròn một lượt. Kí hiệu x là số phiên hiệu các đội $x \in \{1, 2, ..., 6\}$, r kí hiệu x vòng thi đấu r $\in \{1, 2, ..., 5\}$ như vậy mỗi đội phải tiến hành năm vòng đấu. Dưới đây là bảng sắp xếp lịch thi đấu cho sáu đội trong năm vòng thi đấu. Trong bảng có r hàng, x cột, số phiên hiệu mỗi đội là y, số vòng đấu là r.

Bảng lịch thi đấu được sắp xếp như thế nào?

r \ x	1	2	3	4	5	6
1	5	4	6	2	1	3
2	6	5	4	3	2	1
3	2	1	5	6	3	4
4	3	6	1	5	4	2
5	4	3	2	1	6	5

Trước hết xin giới thiệu khái niệm "đồng dư". Với hai số nguyên a, b, nếu chọn được một số m sao cho khi a, b chia cho m (số chia) thì ta được một thương số là số nguyên nhưng phép chia có số dư bằng nhau. Ví dụ với hai số $a = 34$ và $b = 12$ và nếu chọn $m = 11$ thì số dư của hai phép chia bằng nhau và bằng 1. Người ta nói a và b có mối liên quan với nhau qua đồng dư m và viết: $a \equiv b \pmod{m}$. Ta đọc a và b đồng dư theo mođun m. Khái niệm đồng dư ra đời rất sớm từ thế kỉ thứ V. Ở Trung Quốc khái niệm đồng dư xuất hiện đầu tiên trong bộ sách "Sách toán Tôn Tử". Trong đời sống hằng ngày chúng ta cũng thường gặp hiện tượng đồng dư. Ví dụ trong một tháng nào đó nếu ngày 2 là thứ tư thì các ngày 9, 16, 23 cũng là ngày thứ tư. Vì thế các số 9, 16, 23 liên quan với nhau qua đồng dư theo mođun 7.

Nói chung để xếp lịch thi đấu theo thể thức thi đấu vòng tròn có N đội tham gia chỉ cần ở vòng đấu thứ r ta chọn giá trị y thế nào cho $x + y = r \pmod{N - 1}$ là được.

Như trong ví dụ trên, ta phải chọn y thế nào để $x + y$ chia 5 có số dư bằng r là được.

Ví dụ ở vòng đấu thứ nhất ($r = 1$, $x+y = 6$) nên với các giá trị x = 1; y = 5; x =2; y = 4 thì đều đáp ứng được yêu cầu. Nhưng x = 3; y = 3 thì gặp trường hợp đội thứ ba lại đấu với chính mình nên không thể được. Vì vậy trong trường hợp này, ta quy ước chọn đội cuối cùng là đội số 6 thi đấu với đội 3. Như vậy ở hàng thứ nhất ta giải quyết xong.

Ở vòng thi đấu thứ hai ($r = 2$, $x + y = 7$), ở hàng thứ hai không gặp trở ngại gì.

Ở vòng đấu thứ ba ($r = 3$; $x + y = 8$), khi $x = 1$, $y = 7$ vì không có đội bóng có phiên hiệu này, nên trong trường hợp này ta chọn $x + y = r$ thì $x = 1$, $y = 2$; $x = 2$, $y = 1$. Sau đó lại quay về $x + y = 8$ thì $x = 3$, $y = 5$; khi $x = 4$ thì $y = 4$ nên bây giờ y không thể bằng 4 mà lấy bằng 6.

Bằng cách tương tự người ta có thể lập lịch thi đấu cho thể thức thi đấu vòng tròn của một bảng có 6 đội.

Như vậy nếu số các đội ghi tên thi đấu là số chẵn, thì mỗi đội trong một vòng đấu đều có đấu thủ khác nhau. Tuy nhiên đây không phải là lịch đấu duy nhất. Nếu số đội tham gia thi đấu là số lẻ, thì cách xếp lịch thi đấu như vừa trình bày sẽ không thích hợp.

Từ khoá: *Khái niệm đồng dư.*

105. Vì sao trong các buổi thi đấu, khi tính điểm trung bình người ta phải loại bỏ các điểm số quá cao hoặc quá thấp?

Trong một cuộc thi hát, uỷ viên chấm thi thường tuyên bố điểm số 9,00, 9,50, 9,55, 9,6, 9,75, 9,90. Nhưng khi tính điểm bình quân người ta đã bỏ các điểm số quá bé và quá lớn và tính điểm bình quân như sau:

$$\frac{9,5 + 9,55 + 9,6 + 9,75}{4} = 9,6$$

Vì sao người ta lại bỏ đi các điểm quá cao và quá thấp? Đó là để loại bỏ các điểm khác thường. Điểm khác thường là những số quá lớn hoặc quá bé so với số bình quân.

Thông thường các điểm khác thường là do trọng tài sơ ý và các yếu tố tâm lí hoặc quá phẫn nộ hoặc quá phấn chấn gây nên. Để giảm bớt các điểm khác thường làm ảnh hưởng đến độ chính xác của kết quả điểm bình quân, việc loại bỏ các điểm khác quá cao hoặc quá thấp là hợp lí.

Điều này có liên quan đến khái niệm số trung vị trong toán học. Nhưng thế nào là số trung vị? Ta lại thử xem xét ví dụ trên kia, cứ theo thứ tự sắp xếp của sáu số như trên ta lấy bình quân của ba số hoặc bốn số thì điểm bình quân sẽ là số trung bình.

$$^{(9,55 + 9,6)}/_{2} = 9,575$$

Nếu số uỷ viên của hội đồng chấm thi là số lẻ, nếu lấy trung bình từ năm số đứng trước, thì số trung vị sẽ là 9,55 tức là điểm số thứ ba. Khi xử lí tìm số trung vị với các con số ở bên trái số trung bình, chỉ cần không lớn hơn số trung vị thì cũng không làm thay đổi số trung vị. Khi xử lí với các số ở bên phải số trung vị, chỉ cần không cần nhỏ hơn số trung vị thì cũng không làm thay đổi giá trị số trung vị. Từ đó có thể thấy, số trung vị không chịu ảnh hưởng của các số quá lớn hoặc quá bé cực đoan, còn điểm bình quân thì chịu ảnh hưởng của mỗi giá trị trong các số. Vì vậy số trung vị có lúc phản ảnh mức độ bình quân. Ví dụ trong một lớp học có 10 bạn tham gia một cuộc thi, có hai người bị điểm 0. Số điểm của nhóm người sắp xếp như sau:

0, 0, 65, 69, 70, 72, 78, 81, 85, 89.

Điểm bình quân sẽ là:

$$\frac{0 + 0 + 65 + 69 + 70 + 72 + 81 + 85 + 89}{10} = 60,9$$

Như vậy ngay bạn có điểm số 65 đã vượt điểm bình quân như vậy là có điểm số trên trung bình.

Đương nhiên không phải như vậy. Nếu loại bỏ hai người bị hỏng thi, thì anh chàng có điểm thi 65 sẽ ở vị trí cuối bảng. Như vậy điểm bình quân không phản ánh đúng mức độ trung bình. Thế nhưng nếu loại bỏ điểm hỏng thì lấy điểm bình quân của tám số còn lại liệu có được không? Đương nhiên không được. Bây giờ chỉ lấy điểm trung vị là thích hợp. Điểm trung vị là trung bình giữa điểm số thứ năm và điểm số thứ sáu, tức $^{70 + 72} / _{2} = 71$.

Số điểm lớn hơn 71 là trên trung bình, nhỏ hơn 71 là dưới trung bình. Như vậy điểm trung vị mới phản ánh đúng mức trung bình.

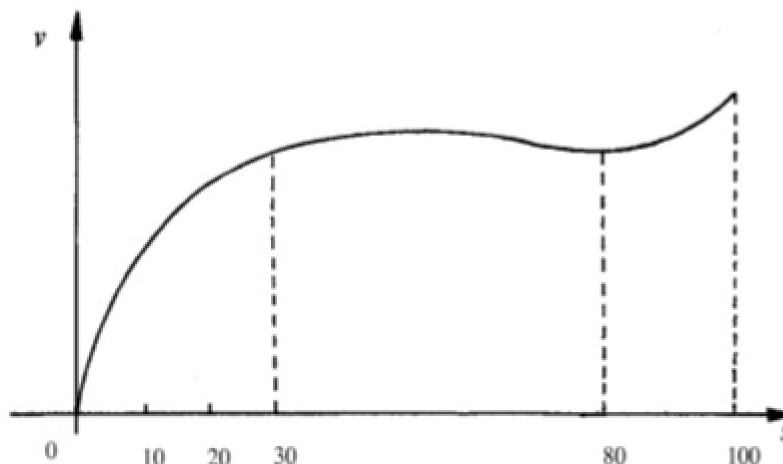


Đương nhiên số trung bình cũng có ưu điểm riêng tức là cần phải chú ý đến tất cả các số. Việc loại bỏ các điểm quá lớn và quá bé là đã kết hợp được ưu điểm của hai phương pháp: vừa loại bỏ giá trị dị thường vừa phát huy được tác dụng của phe đa số trong hội đồng chấm thi nên đó là phương pháp hợp lí.

Từ khoá: *Số bình quân; Điểm trung vị.*

106. Vì sao thành tích chạy 400 m tiếp sức lại cao hơn khi chạy cự ly 100 m?

Tháng 10 năm 1968, tại Olimpic mùa hè Mexico, nam vận động viên Mỹ Hayenxơ đã chạy 100 mét hết 9,9", lần đầu tiên đã chạy 100 m dưới 10", đây là một mốc quan trọng trong lịch sử điền kinh. Cũng tại thế vận hội này, đội chạy tiếp sức 400 m nam của Mỹ với thành tích 38"2, trung bình chạy 100m hết 9"6.



Điều rõ ràng là cuộc chạy tiếp sức 400 m là do bốn người khác nhau thực hiện chạy cự ly 100 m kế tiếp nhau. Nếu bốn vận động viên thực hiện cùng với thành tích của Hayenxơ, tức thành tích chạy 100 m hết 9,9" thì bốn người này phải chạy với thời gian 39,6". Tại sao vậy? Để giải đáp câu hỏi này, người ta phải nhờ các nhà toán học.

Vào năm 1973, nhà toán học Mỹ đãxây dựng mô hình toán học cho môn chạy tốc độ cự ly 100 m. Đây là đường biểu diễn tốc độ chạy của vận động viên chạy 100 m trong suốt lộ trình thi đấu. Từ đường biểu diễn này, với các vận động viên chạy tốc độ cự ly 100 m thì ở 30 m đầu, tốc độ của vận

động viên tăng rất nhanh; trong khoảng từ 30 m - 100 m vận động viên duy trì chạy với tốc độ lớn nhất, trong khoảng thời gian này tốc độ chạy của vận động viên có thể có thay đổi nhưng không thay đổi nhiều lắm; khoảng bắt đầu 80 m vì thể lực giảm nên tốc độ của vận động viên có thể giảm, nhưng ở gần đích tốc độ lại một lần nữa tăng lên.

Điều đó cho thấy với bất kì vận động viên chạy 100 m nào, tốc độ chạy cao nhất không thể xuất hiện ngay từ lúc mới bắt đầu chạy, mà phải vào khoảng sau 30 m chạy đầu tiên là miền cần để anh ta hoàn thành việc tăng tốc độ đến tốc độ chạy cao nhất, đó chính là quãng đường để vận động viên chạy tiếp sức 4.100 m chạy lấy đà.

Trong cuộc chạy thi tiếp sức 4.100 m, các vận động viên cầm gậy chạy ở chặng 2, 3, 4 đãcó quãng đường chạy lấy đà, trong đó 10 m đầu thuần để lấy đà, 20 m sau khu vực chuẩn bị cho việc tiếp sức. Vì vậy chỉ cần phát huy tốt kĩ thuật chạy lấy đà và kĩ thuật trao gậy tiếp sức, nhờ vậy với các vận động viên cầm gậy tiếp sức từ chặng thứ hai trở đi, khi vào đường chạy là ở vào độ chạy với tốc độ nhanh nhất; không như vận động viên chạy ở chặng một nhất thiết phải có chặng chạy tốc độ 30 m ban đầu. Vì vậy trừ vận động viên cầm gậy tiếp sức ban đầu thành tích không thể vượt vận động viên chạy 100 m tốt nhất; các vận động viên cầm gậy tiếp sức ở các chặng sau đều có khả năng vượt quá thành tích chạy 100m tốt nhất của chính họ.

Từ khoá: *Tốc độ và mô hình toán học.*

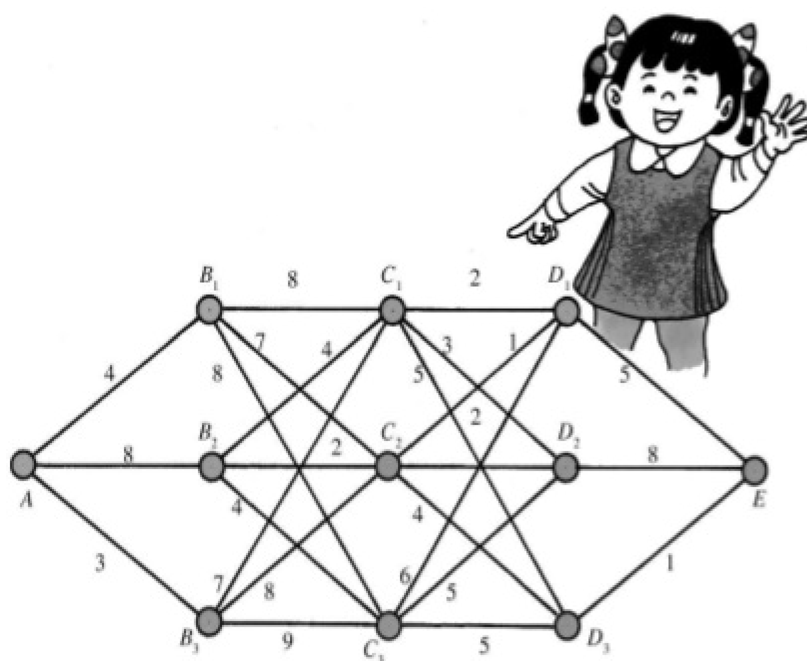
107. Làm thế nào tìm con đường ngắn nhất?

Trong cuộc sống hằng ngày chúng ta thường gặp vấn đề sau đây: Cần tìm con đường ngắn nhất đi từ điểm A đến điểm E như ở hình vẽ. Trên hình vẽ các điểm cuối mỗi đoạn đường là một địa điểm, đoạn thẳng chỉ con đường nối giữa hai điểm, con số trên mỗi đoạn thẳng chỉ cự ly của đoạn đường.

Trước hết xin dẫn ra phương pháp thông thường. Xem xét tất cả các tuyến đường có thể đi, tính toán tổng các cự ly, từ đó chọn được tuyến đường ngắn nhất. Từ A đến E có 3.3.3.1 đoạn đường có thể đi, mỗi tuyến đi cần thực hiện ba lần phép cộng, cần phải thực hiện 81 phép cộng. Ngoài ra còn phải tiến hành 26 lần phép so sánh, cuối cùng sẽ tìm được tuyến đường ngắn nhất là $A \rightarrow B_2 \rightarrow C_2 \rightarrow D_3 \rightarrow$ E. Cự ly tương ứng bằng 15.

Ta dễ dàng nhận thấy thực hiện như phương pháp thông thường quả là đơn giản nhưng để thực hiện lại không dễ vì phải qua nhiều địa điểm, thực hiện quá nhiều phép tính.

Vậy liệu có phương pháp nào khác không?



Giả sử ta chọn được con đường ngắn nhất là A → B2 → C2 → D3 → E thì đoạn đường nhỏ trong đó đi từ hai điểm của tuyến đường cũng phải là ngắn nhất, ví dụ $C_2 \rightarrow D_3 \rightarrow E$ cũng phải là con đường ngắn nhất từ C_2 đến *E*. Nếu không, khi dùng phản chứng ta phải tìm được một tuyến đường khác ngắn hơn và điều đó trái với giả thiết. Tuyến đường ngắn nhất như mô tả ở trên, chúng ta có thể bắt đầu từ cuối tuyến đường truy dần từng bước ta sẽ tìm được tuyến đường ngắn nhất từ *A* đến *E*.

Bước thứ nhất: Tìm đoạn đường ngắn nhất từ *D* đến *E*.

Từ D_1, D_2, D_3 đến E có các tuyến *f(D1)* = 5, *f(D2)* = 8, *f(D3)* = 1. *f(xi)* biểu diễn cự ly ngắn nhất từ x_i đến *E*.

Bước thứ hai: Xét đoạn đường ngắn nhất từ *C* đến *E*.

Xuất phát từ C1 có khả năng chọn đến D_1, D_2 hoặc D_3.

$$f(C_1) = \min \begin{cases} d(C_1, D_1) + f(D_1) \\ d(C_1, D_2) + f(D_2) \\ d(C_2, D_3) + f(D_3) \end{cases} = \min \begin{cases} 2 + 5 \\ 3 + 8 = 6 \\ 5 + 1 \end{cases}$$

trong đó, d(C_1, D_1) biểu diễn khoảng cách từ C_1 đến D_1, dễ dàng tìm thấy khoảng cách ngắn nhất là theo tuyến C1 → D3→ E.

Tương tự xuất phát từ C_2 ta có

$$f(A) = \min \begin{cases} d(A,B_1) + f(B_1) \\ d(A,B_2) + f(B_2) \\ d(A,B_3) + f(B_3) \end{cases} = \min \begin{cases} 4 + 12 \\ 8 + 7 = 15 \\ 3 + 13 \end{cases}$$

Và tuyến ngắn nhất là $C_2 \rightarrow D_3 \rightarrow E$. Tương tự

Từ C3 tuyến ngắn nhất là C3 → D3 →E với f(C3) = 6

Cũng với lí do tương tự, ta tìm thấy $f(B_1)$ = 12 cho đoạn đường con $B_1 \rightarrow C_2 \rightarrow D_3 \rightarrow E$

và $f(B_2)$ = 7 cho đoạn đường con $B_2 \rightarrow C_2 \rightarrow D_3 \rightarrow E$

$f(B_3)$ = 12 cho đoạn đường con $B_1 \rightarrow C$__*1* (hoặc C_2) $\rightarrow D_3 \rightarrow E$

Xuất phát từ A ta có:

$$f(A) = \min \begin{cases} d(A,B_1) + f(B_1) \\ d(A,B_2) + f(B_2) \\ d(A,B_3) + f(B_3) \end{cases} = \min \begin{cases} 4 + 12 \\ 8 + 7 = 15 \\ 3 + 13 \end{cases}$$

Dựa vào quá trình tính toán, ta thấy số lượng phép toán giảm đi rất nhiều: chỉ cần 3.3 + 3.3 + 3 = 21 phép cộng và 3.2 + 3.2 + 2 = 14 phép so sánh. Nếu số địa điểm càng lớn thì ưu điểm của phương pháp càng rõ rệt. Dùng phương pháp này không chỉ cho thấy tìm được đường từ *A* đến *E* ngắn nhất mà còn biết được cự ly từ điểm này đến điểm khác của tuyến đường. Trong toán học, người ta gọi đây là phương pháp "giải pháp theo quy tắc động thái".

"Quy tắc động thái" là phương pháp cho phép giải quyết nhanh bài toán tối ưu, do nhà toán học Mỹ Bellman đưa ra năm 1959. Đây là bài toán "tối ưu hoá" đã được phát triển thành ngành toán học mới. Phương pháp quy tắc động thái được phát huy rộng rãi trong các ngành kĩ thuật công trình, quản lí kinh tế, trong sản xuất công nghiệp và kĩ thuật quân sự và ngày càng được coi trọng, thậm chí còn được dùng trong việc chọn phạm vi trong máy tính. Bởi vì nếu dùng phương pháp thông thường thì đến cả máy tính cũng khó thực hiện hết được các phép tính.

Từ khoá: *Phương pháp trật tự thường; Quy tắc động thái.*

108. Vì sao cá lại hay nổi lên lặn xuống khi bơi trong nước?

Nếu chú ý quan sát đàn cá bơi lội trong bể cá bạn sẽ thấy chúng luôn lúc nổi lên lúc lặn xuống. Đó chính là cách cá thực hiện việc tiết kiệm năng lượng. Thế tại sao cách bơi lội này lại tiết kiệm được năng lượng?

Giả sử cá bơi với tốc độ không đổi *v*. Cho *D* là lực cản mà cá phải chịu khi lặn với tốc độ đó. Cho *W* là khối lượng tĩnh của cá, α là góc lặn xuống của cá so với đường nằm ngang, β là góc khi cá nổi lên. Theo cơ học khi cá lặn sẽ chịu lực cản thẳng đứng hướng lên bằng phân lực của khối lượng tĩnh *W* khi chuyển động.

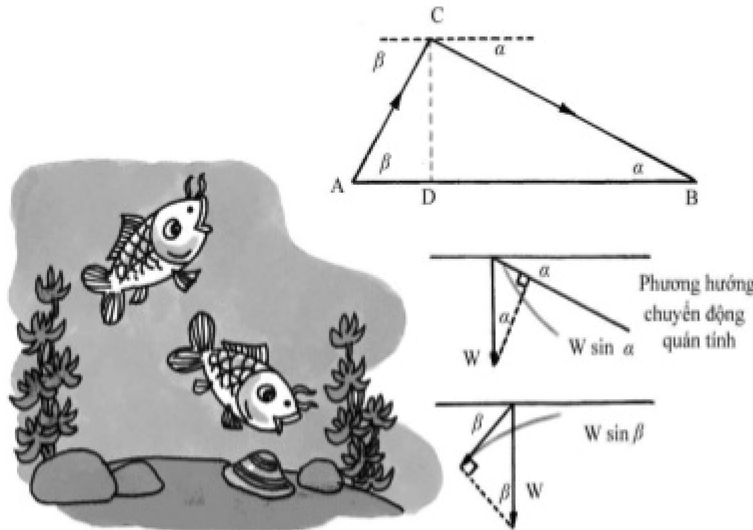
$$D = W\sin\alpha$$

Khi cá lặn lực cản sẽ bằng k lần lực đẩy tức là bằng kD. Khi cá nổi lên sẽ cần một lực bằng tổng của lực nổi và phân lực của lực cản hướng lên do lực đẩy K với khối lượng tĩnh W, tức

$$KD + W\sin\beta = W(K\sin\alpha + \sin\beta)$$

Khi cá lội theo phương nằm ngang, phân lực do chuyển động hướng lên bằng 0, lực cần thiết sẽ là

$$KD = WK\sin\alpha$$



Còn khi cá lặn không cần lực. Do đó khi cá bơi theo đường từ *A* đến *C* lại lặn xuống điểm *B* theo hình răng cưa so với việc bơi theo phương nằm ngang *AB* thì tỉ số năng lượng tiêu tốn cho hai trường hợp sẽ là (công được tính bằng tích số của lực nhân với đoạn đường điểm đặt của lực dịch chuyển):

$$P = \frac{W(K\sin\alpha + \sin\beta).AC}{WK\sin\alpha.AB}$$

Mà $AB = AC\cos\beta + CD\text{cotg}\alpha = AC(\cos\beta + \sin\beta + \text{cotg}\alpha)$

Nên

$$P = \frac{K\sin\alpha + \sin\beta}{K\sin(\alpha + \beta)}$$

Theo quan sát thực tế thì thông thường $\alpha = 11,20^0$,

K = 3 nên $$P = \frac{0,588 + \sin\beta}{3\sin(11,2^0 + \beta)}$$

Theo hình vẽ ta thấy $11,2^o + \beta < \pi/_2$ nên $\beta < 78,4^o$

thì *P* < 1 tức khi cá bơi lội theo đường răng cưa thì tiêu tốn ít năng lượng hơn khi bơi ngang. Đặc biệt khi $\beta = 59,15^o$ thì P = 0,51 nên khi cá bơi theo hình răng cưa thì tiêu hao năng lượng chỉ gần bằng nửa năng lượng khi cá bơi ngang. Cho nên, cá đương nhiên là bơi lội theo kiểu hình răng cưa.

Từ khoá: *Lực cản; Tiêu hao năng lượng; Hình răng cưa.*

109. Tại sao các chỗ đường sắt uốn cong không thể ghép liền đường thẳng với cung tròn?

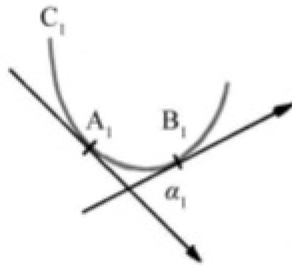
Bạn có biết chỗ đường sắt uốn cong có dạng như thế nào không? Khi chiếc tàu cao tốc từ đoạn đường thẳng đi vào đoạn đường cong, đường sắt phải như thế nào để khi tàu đổi hướng mà không gây lên sự cố? Câu trả lời là phải có đoạn đường trung gian để giảm bớt chấn động. Ở nhiều nước, người ta dùng đoạn đường trung gian này có dạng một đường parabon dạng $y = kx^3$(*k* là hằng số) là đoạn cung sau đó đến đoạn cung tròn.

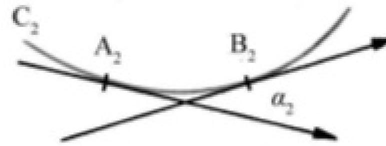
Vì sao người ta lại dùng loại parabon bậc ba $y = kx^3$ làm đoạn trung gian? Đó là đặc điểm về độ cong của các loại đường cong. Thế nào là độ cong của các đường cong? Như ở hình vẽ hai đoạn đường cong *C1* và *C2* có cùng độ dài là A_1B_1 và A_2B_2, rõ ràng là độ cong ở A_1B_1 lớn hơn ở A_2B_2 nhiều.

Ta vẽ hai tiếp tuyến tại các điểm đầu và cuối của các đường cong. Các tiếp tuyến tại các điểm đầu và cuối của các đường cong tạo thành các góc α1 và α2 tương ứng. Rõ ràng là α1 > α2 có nghĩa là, nếu độ cong của đường cong càng lớn thì góc của các tiếp tuyến ở điểm đầu và điểm cuối của các đường cong càng lớn. Vậy ta có thể dùng góc của các tiếp tuyến tại điểm đầu và điểm cuối của đường cong để đo độ cong.

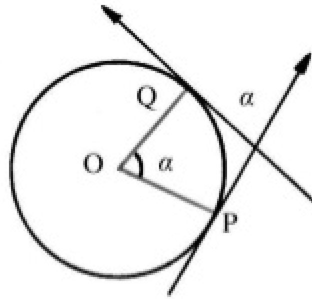
Ví dụ với các đường thẳng thì đường tiếp tuyến tại các mút của đường thẳng đều trùng nhau nên góc các tiếp tuyến bằng 0, nên độ cong của đường thẳng bằng 0.

Với đường tròn bán kính *R*, tiếp tuyến tại hai mút của cung tròn $\widehat{PQ}$ bằng với góc α của hai bán kính *OP* và *OQ*. Nếu α đo bằng đơn vị rađian thì $\widehat{PQ} = R\alpha$





Hình 2



Hình 3



Hình 4

nên độ cong của cung $\widehat{PQ}$ là: $\frac{\alpha}{R\alpha} = \frac{1}{R}$.

Như vậy với đường tròn thì độ cong tại mọi điểm là $^1/_R$.

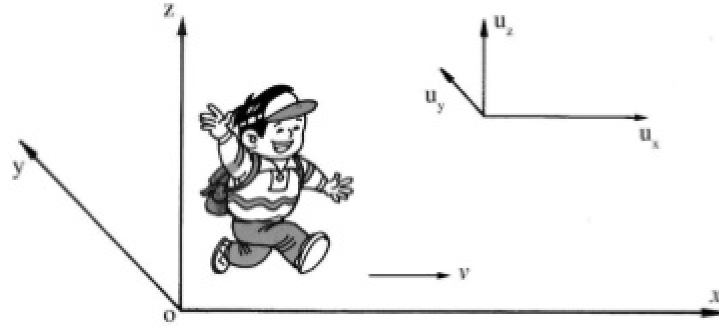
Khi ta dùng đường cong bậc ba: $y = kx^3$ từ 0 đến B để nối đoạn thẳng với cung tròn tức cho độ cong của đường sắt thay đổi từ 0 đến $^1/_R$, không làm độ cong của đường sắt thay đổi đột ngột nên không gây ra sự cố.

Từ khoá: *Đoạn đường sắt tiếp nối thẳng; Độ cong; Đường cong Parabon bậc ba.*

110. Có phải khi mưa, càng đi nhanh càng ít bị ướt đẫm nước mưa?

Thông thường khi đi trong mưa người ta cố gắng chạy thật nhanh vì cho rằng đi càng nhanh thì càng ít bị ướt đẫm nước mưa. Thực tế có phải như vậy không?

Giả sử thân người là một cột vuông dài thì, diện tích của các mặt trước, mặt bên và đỉnh đầu tỉ lệ 1: *a: b*, thân người chuyển động theo phương trục *x* với tốc độ *v*, đoạn đường di chuyển là L.



Giả sử mưa rơi với vận tốc *u* có các thành phần tốc độ theo các trục *Ox, Oy*, trên mặt bằng và trục thẳng đứng *Oz* là U_x, U_y, U_Z.

Trong đơn vị thời gian, nước mưa rơi vào trước mặt, mặt bên và đỉnh đầu làm ướt đẫm nước mưa, có liên quan đến diện tích các mặt, phương hướng chuyển động và tốc độ tuyệt đối của nước mưa, vì vậy trong đơn vị thời gian thì độ đẫm nước mưa có thể biểu diễn bằng:

$$K\left(\left|v - u_x\right| + a\left|u_y\right| + b\left|u_z\right|\right)$$

trong đó, *K* là hệ số tỉ lệ. Vì vậy trong khoảng thời gian $^1/_v$, tổng lượng nước mưa ướt đẫm vào người sẽ bằng:

$$S(v) = K\frac{1}{v}\left(\left|v - u_x\right| + a\left|u_y\right| + b\left|u_z\right|\right)$$

Trong đó, *v* là biến số, *S* là các đại lượng phụ thuộc *v*. Sau đây ta sẽ xét các trường hợp khi $v < U_x$, tức khi vận tốc người nhỏ hơn tốc độ của mưa

$$S(v) = K.1\left(\frac{u_x + a\left|u_x\right| + b\left|u_z\right|}{v} - 1\right)$$

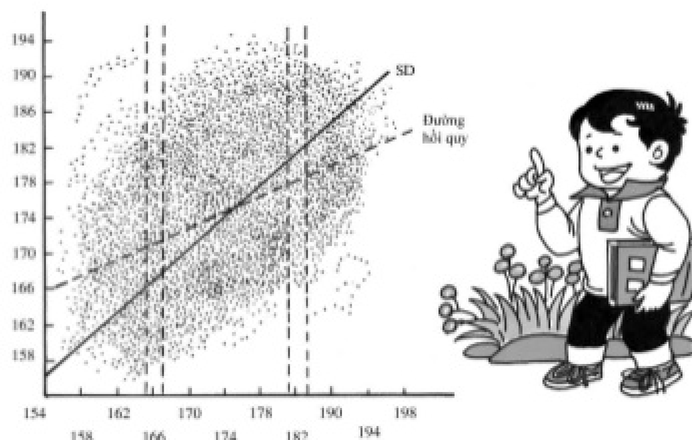
Hiển nhiên *v* càng lớn thì *S(v)* càng bé hay nói cách khác, trong trường hợp này thì đi càng nhanh càng bị ướt đẫm nước mưa.

Cũng theo công thức trên chúng ta có thể tìm thấy $v \geq u_v$, nếu $U_x < a|u_x| + b|u_z|$ thì nếu chạy càng nhanh càng ít bị đẫm nước mưa. Nhưng nếu $U_x > a|u_x| + b|u_z|$ thì chạy càng nhanh càng đẫm nhiều nước mưa. Thực ra do trong trường hợp này tốc độ của mưa theo phương trục *x*, lượng mưa rơi vào người chủ yếu từ phương này, vì thế trường hợp này *v* không nên quá lớn. Trái lại trong trường hợp này tốc độ di chuyển của người và nước mưa bằng nhau tức là

$$v = U_x$$

thì lượng nước mưa đến từ phía trước bằng 0.

Mọi người đều biết chiều cao của người có liên quan chặt chẽ với tính di truyền. Thông thường nếu cha mẹ cao to thì sinh ra con cái cũng có tầm vóc cao to. Thế nhưng trong cuộc sống thường ngày cũng có nhiều ngoại lệ. Vì sao vậy?



Sau đây chúng tôi xin trình bày một số khái niệm về toán thống kê.

Giả sử $x_1, x_2, ... x_n$ là chiều cao của n người.

Thế thì chiều cao trung bình của nhóm người này sẽ là

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_1 = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right)$$

và độ lệch quân phương

$$SD = \sqrt{\frac{1}{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\left[\left(x_1 - \bar{x}\right)^2 + \left(x_2 - \bar{x}\right) + ... + \left(x_n - \bar{x}\right)^2\right]}$$

Phản ánh sự sai lệch của các giá trị xi so với số trung bình.

Để phản ánh mối quan hệ di truyền của bố mẹ và con cái về phương diện tầm vóc cơ thể, người ta đã tiến hành nghiên cứu 1000 đôi cha con về mối tương quan chiều cao của họ. Giả sử *x* và *y* biểu diễn chiều cao của cha và con, và chọn *x* là chiều cao của bố đặt trên trục hoành, còn *y* là chiều cao của con đặt trên trục *y*. Đặt các cặp số (x_i, y_i) trên toạ độ phẳng (i - 1,...,1000) ta có thể tìm thấy toàn bộ quang cảnh của mối liên quan này bằng đám tương quan có dạng hình bầu dục, hình bầu dục có trục nghiêng 45^o.

Vì vậy đường biểu diễn độ tản mạn *SD* sẽ là đường thẳng cắt trục hoành một góc 45^o. Và bởi vì so với cha thì con thường cao hơn cha khoảng 2 cm và đường biểu diễn độ tản mạn sẽ xuất phát từ điểm 158 cm trên trục hoành.

Ta thử xét các trường hợp các ông bố cao 182 cm trở lên thì các đứa con đại đa số phân bố ở phía dưới đường tản mạn. Trái lại với các ông bố có chiều cao thấp hơn 166 cm thì những đứa con

thường có chiều cao phân bố phía trên đường *SD*. Trên hình vẽ đường thẳng biểu diễn bằng nét đứt là đường hồi quy. Dựa vào đường hồi quy có thể biết chiều cao bình quân của những đứa con so với chiều cao của các ông bố. Ví dụ với các ông bố cao 182 cm thì con cao trung bình 180 cm; còn với các ông bố cao 166 cm thì con cao bình quân 171 cm.

Trên đây chúng ta vừa xét "hiệu ứng hồi quy". Căn cứ hiệu ứng hồi quy chúng ta có thể tìm khuynh hướng chiều cao trung bình của những đứa con so với chiều cao trung bình của các ông bố. Với các ông bố có chiều cao nào đó thì chiều cao của con có hướng ngược với đường hồi quy.

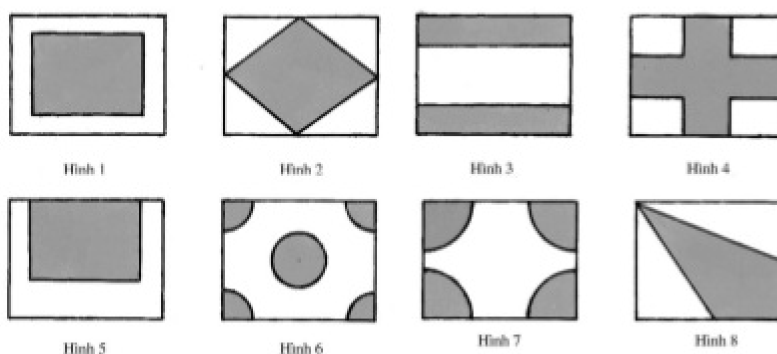
Theo như phân tích ở trên, cha mẹ cao to sẽ sinh con có xu hướng là con có tầm vóc thấp và ngược lại khi cha mẹ lùn sẽ sinh con cao to. Không chỉ về tính trạng chiều cao mà nhiều loại tính trạng di truyền ở loài người cũng có xu hướng hồi quy, do có tác dụng điều tiết trong các di truyền tính trạng, mà làm cho các loại tính trạng di truyền ở loài người được ổn định qua nhiều thế hệ.

Từ khoá: *Đường thẳng hồi quy; Hiệu ứng hồi quy; Độ lệch bình phương.*

Trong các khu dân cư, người ta thường bố trí các bồn hoa, thảm cỏ làm cho khu dân cư được đẹp đẽ, vui mắt. Thế các bạn có biết cách thiết kế các kiểu bồn hoa này không?

Tháng 7- 1993, một thầy giáo dạy toán lớp ba đã ra cho học sinh một đề toán như sau: Có một khu đất hình chữ nhật dài 4 m, rộng 3 m, cần bố trí trên khu đất một số bồn hoa nào để cho diện tích các bồn hoa chiếm nửa diện tích khu đất? Bạn hãy đưa ra các phương án.

Các bạn trẻ đã phát huy hết khả năng và thiết kế, nhiều đồ án không chỉ trông rất đẹp mà còn có thể tính được diện tích các bồn hoa. Các hình vẽ ở bên trình bày tám loại đồ án. Bạn có thể thiết kế các bồn hoa đẹp hơn không?



Đối với tám đồ án nêu trên, đều có thể dễ dàng tính được diện tích các bồn hoa, khi xây dựng có thể chọn được chỗ đất và bố trí trên mặt bằng. Ví dụ như ở hình 6 cấu tạo từ một hình tròn và bốn quạt tròn, mỗi quạt tròn đúng bằng $^1/_4$ diện tích hình tròn, các quạt tròn và hình tròn có bán kính bằng nhau và bằng R. Ta dễ dàng tính được bán kính của hình tròn này. Theo yêu cầu của đồ án ta có phương trình: $2(\pi R)^2 = {}^1/_2.4.3$, $\pi R^2 = 3$,

$$R = \sqrt{\frac{3}{\pi}} = 0,977 \text{ m.}$$

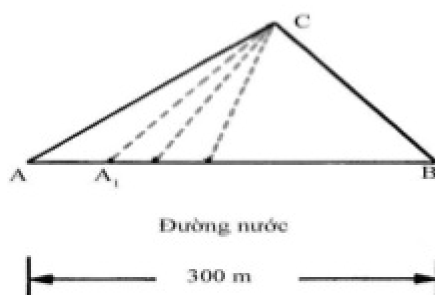
Như vậy chỉ cần chọn vòng tròn có bán kính bằng 0,977 m thì các bồn hoa thực hiện như ở đồ

án 6 sẽ có diện tích bằng nửa diện tích của khu đất đãchọn.

Thôn nọ, một khu đất hình tam giác có một cạnh tiếp giáp với một mương nước như ở hình vẽ. Các nhà chức trách trong thôn muốn chia khu đất cho năm hộ dân cư. Để việc tưới nước được tốt, mỗi khu đất của mỗi hộ dân cư phải nối với mương nước. Bạn hãy căn cứ theo số nhân khẩu của mỗi hộ để việc phân chia khu đất như thế nào thì tốt. Số nhân khẩu trong mỗi hộ dân cư được liệt kê trong bảng dưới đây:

Hộ dân cư	1	2	3	4	5
Số nhân khẩu	5	2	4	8	6

Ta biết rằng diện tích hình tam giác bằng một nửa tích số của đáy nhân với chiều cao. Nếu các hình tam giác có chiều cao bằng nhau thì diện tích tam giác sẽ tỉ lệ với độ dài của đáy tam giác. Giả sử có 2 hình tam giác *A* và *B* nếu cạnh đáy của A gấp đôi cạnh đáy của *B* thì diện tích của *A* gấp đôi diện tích của *B*.



Tổng số nhân khẩu của năm hộ dân là 25. Các hộ dân đều nằm trên *AB* là mương nước. Bắt đầu từ *A* (hoặc *B*) lấy $^{300}/_{25}$ làm đơn vị sau đó theo số nhân khẩu nhân với đơn vị vừa tính được là được phần đất cho hộ tương ứng.

Ví dụ với hộ số 1 ta lấy năm đơn vị độ dài 12.5 = 60 m. Từ A đặt đoạn AA_1 = 60 m, ta được khu đất giới hạn cho hộ số 1 là tam giác AA_1C. Nếu các hộ dân cư cảm thấy khu đất hình tam giác không thuận tiện cho việc canh tác có thể lựa chọn nhiều phương án phân chia khác theo quan điểm nào đó thích hợp.

Từ khoá: *Hình tam giác và diện tích tam giác.*

Trong cuộc sống hàng ngày chúng ta thường hay gặp các kiểu vé số có thưởng như vé xổ số, xổ số thể thao, xổ số gửi tiền tiết kiệm v.v.. Vậy khi chọn số để mua nên chọn các số liền nhau hay không liền nhau? Chọn mua kiểu nào thì khả năng trúng thưởng lớn hơn?

Trước hết ta xét một ví dụ đơn giản. Giả sử trong một kì xổ số, các vé trúng thưởng có chữ số

cuối là số 0, cơ hội trúng thưởng là 10% (tức xác suất trúng thưởng). Ta đã mua hai vé số. Nếu mua hai vé có số liền nhau thì có 10 loại khả năng là (0, 1), (1, 2), (2, 3)... (9, 0). Khả năng xuất hiện các tình huống (xác suất) là như nhau. Trong mười tình huống chỉ có hai tình huống (0, 1) và (9, 0) là có xuất hiện số 0. Trong hai loại tình huống chỉ có một vé số là trúng thưởng. Do đó tổng các xác suất trúng thưởng là 20%, bình quân trong một lần mua vé số có 1. 20% = 0,2. Nếu mua hai vé số bất kì không liền nhau thì có 100 loại khả năng xuất hiện các chữ số cuối, khả năng xuất hiện mỗi tình huống là như nhau và bằng 1%. Các tình huống sẽ là:

(0, 0), (0, 1), (0, 2)... (0, 9)

(1, 0), (1, 1), (1, 2)... (9, 9)

.....

(9, 0), (9, 1), (9, 2)... (9, 9)

Trong 100 tình huống liệt kê chỉ có tình huống (0, 1) là trúng số, nên xác suất trúng thưởng các tình huống là 1%; còn trong các tình huống (0, 1)...(0, 9) đến (1, 0)... (9, 0) tất cả có 18 tình huống chỉ có một vé trúng thưởng nên có xác suất 18%; các tình huống khác đều không trúng thưởng. Vì vậy tổng xác suất trúng thưởng trong các tình huống là 1% + 18% = 19%, so với 20% thì nhỏ hơn 1%. Thế nhưng bình quân khả năng trúng số cho một lần mua vé số vẫn là 2.1% + 1.18% = 0,2 lần cũng bằng khả năng mua các vé số liền nhau. Vì vậy ta có thể nói dẫu cho mua các vé số liền nhau hoặc không liền nhau thì khả năng trúng thưởng là như nhau.

Nếu một lần mua ba vé số thì cách tính toán cũng thực hiện theo phương pháp trình bày ở trên. Khi mua vé số có số liền nhau thì xác suất trúng số là 30% bình quân khả năng trúng số cho một lần mua là 0,3%. Khi mua vé số không liền số thì khả năng để ba vé số đều trúng thưởng là 0,1%, để có hai vé trúng thưởng thì có xác suất 2,7%, khả năng chỉ có một vé trúng thưởng là 24,3%. Tổng các xác suất là 27,1% < 30%. Khả năng bình quân của một vé trúng số sẽ là: 3.0,1% + 2.2,7% + 1.24,3% = 0,3 lần so với cách mua liền số thì khả năng trúng thưởng cho một vé mua là như nhau.

Bất kể mỗi lần mua bao nhiêu vé số thì khả năng bình quân trúng thưởng cho một vé mua của hai phương thức mua vé là như nhau.

Bây giờ ta thử thay đổi một chút về thể thức vé trúng thưởng. Thay cho thể thức trúng số là chữ số cuối là số 0, ta chọn vé trúng thưởng là vé có hai chữ số cuối là hai số 00 cho một lô. Giả thiết ta mua ngẫu nhiên hai vé số bất kì giống như cách tính toán trình bày ở trên, khả năng trúng thưởng bình quân của hai phương thức mua vé số là 2%, khả năng trúng thưởng bình quân cho một vé số là 0,02%. Mua theo phương thức không liền số thì khả năng để hai vé số đều trúng thưởng là 1%.1% = 0,01%, chỉ có một vé số trúng thưởng có xác suất 1.99% + 99%.1% = 1,98% và tổng các xác suất trúng thưởng là 1,99% < 2% và bình quân cho trúng thưởng cho một vé số là:

2.0,01 % + 1.1,98% = 0,02 lần.

Và khả năng trúng thưởng cho một vé số ở hai phương thức mua là như nhau.

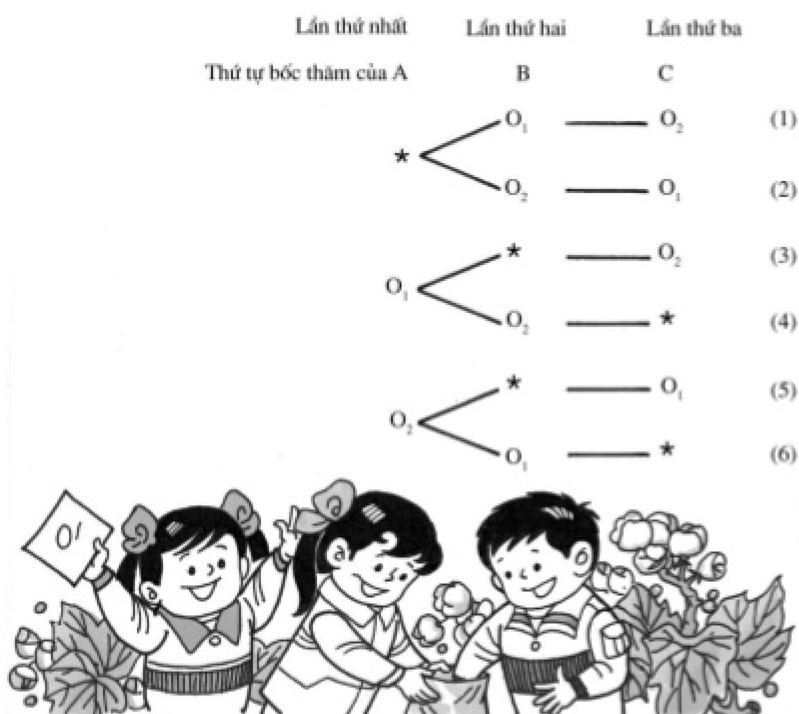
Nói tóm lại dù mua bao nhiêu lô, xác suất trúng thưởng là bao nhiêu, mua nhiều hay ít vé số thì hai phương thức mua vé có số liền nhau hoặc cách xa nhau đều cho các vé số có khả năng trúng thưởng như nhau.

Từ khoá: *Xác suất, số bình quân.*

Khi cần quyết định chọn một phương án trong nhiều phương án đưa ra, người ta hay dùng biện pháp bốc thăm. Ví dụ trong trận thi đấu bóng bàn, người ta dùng biện pháp bốc thăm để chọn vận động viên giao bóng trước. Trong các cuộc thi đấu, người ta hay chọn cách bốc thăm để xếp thứ tự các trận đấu.

Thế việc bốc thăm trước hoặc sau liệu có thể đưa đến các cơ hội như nhau không? Ví dụ cần chọn một trong ba bạn thi tham dự một buổi sinh hoạt nghệ thuật nào đó, người ta dùng biện pháp bốc thăm xem là cách chọn công bằng nhất. Trước hết người ta chọn ba mảnh giấy nhỏ, đánh một kí hiệu riêng vào một mảnh giấy, sau đó xáo trộn và để mỗi người bốc một mảnh giấy. Có bạn nhỏ cho rằng bốc thăm trước có lợi hơn nên tranh quyền bốc trước. Sự thực có phải như vậy không? Chúng ta hãy xem xác suất để mỗi người có thể nhận được mảnh giấy có ghi kí hiệu.

Giả sử cho bạn nhỏ *A, B, C* bốc thăm theo thứ tự: *A* thứ nhất, *B* thứ nhì, *C* thứ ba. Một trong ba mảnh giấy có đánh dấu (*) còn hai mảnh kia đánh dấu "O_1" và "O_2" .



Ta sẽ biểu diễn các tình huống bốc thăm trên hình vẽ ở trên, vì hình vẽ có dạng giống như một cái cây cho nên người ta gọi hình vẽ này là "cây tình huống".

Theo hình vẽ *A, B, C* thứ tự bốc thăm có thể có sáu tình huống, xác suất xuất hiện các tình huống hoàn toàn như nhau. Trong các tình huống (1) và (2), *A* trúng cách với xác suất $^1/_3$. Trong các tình huống (3) và (4), B bốc được thăm trúng cách cũng với xác suất $^1/_3$. Trong các tình huống (5) và (6) thì C trúng cách cũng với xác suất là $^1/_3$.

Từ đó suy ra bốc thăm trước hay sau đều có lợi thế như nhau, không cần phải tranh bốc trước bốc sau.

Từ khoá: *Xác suất.*

Nhiều người cho rằng trò đánh bạc theo kiểu gieo con xúc xắc, việc thắng bại là do thời vận, điều đó lôi cuốn nhiều bạn trẻ tham gia. Về mặt khách quan, trong trò đánh bạc này cơ hội được là như nhau, thậm chí còn có lợi cho người tham gia đánh bạc (con bạc). Nhưng sự thực thì trong trò đánh bạc kiểu gieo con xúc xắc, cơ hội được bạc không như nhau, mà kết cục là nhà cái có lợi và bao giờ cũng thắng. Ta thử xem xét tại sao lại như vậy?

Xét một trò đánh bạc "thử vận may" khá thịnh hành ở nhiều nước. Quy tắc đánh bạc như sau: Mỗi người tham gia phải bỏ 1 đồng đặt cọc, sau đó gieo ba con xúc xắc đồng thời. Bạn có thể nhận được một điểm số nào đó, ví dụ bạn chọn số đánh là "1" điểm. Nếu cả ba con xúc xắc đều xuất hiện một điểm "1", nhà cái phải trả 1 đồng đặt cọc, đồng thời còn trả thêm 1 đồng nữa. Nếu xuất hiện hai điểm "1" thì ngoài tiền đặt phải trả lại, nhà cái còn phải trả thêm 2 đồng nữa; nếu cả ba con xúc xắc đều xuất hiện số "1" thì ngoài tiền đặt cọc, nhà cái phải trả thêm 3 đồng.

Thì ra, sự xuất hiện khi gieo thì khả năng xuất hiện số "1" là $^1/_6$, khi gieo hai con xúc xắc thì khả năng xuất hiện số "1" là $^1/_3$, khi gieo ba con xúc xắc thì khả năng xuất hiện số "1" là $^1/_2$, tức khả năng đặt cọc 1 đồng để nhận được thêm 1 đồng hoặc mất 1 đồng đặt cọc là như nhau, huống hồ lại có khả năng gấp đôi, gấp ba và với người tham gia chơi sẽ là có lợi. Thực ra đó chỉ là nhìn bề ngoài.



Ta thử xem xét sự xuất hiện các tình huống khi gieo 3 con xúc xắc một lần? Khi gieo một con xúc xắc ta có thể nhận được sáu khả năng xuất hiện các số điểm, với con xúc xắc thứ hai cũng có sáu loại khả năng và với con xúc xắc thứ ba cũng vậy và với ba con xúc xắc thì có thể có 6 x 6 x 6 = 216 kết quả. Trong 216 khả năng, xác suất để ba con xúc xắc xuất hiện các số điểm không giống nhau là 6 x 5 x 4 = 120, và để ba con xúc xắc xuất hiện số điểm hoàn toàn giống nhau là 6 loại kết quả, là đồng thời xuất hiện các số "1". "2"..."6". Như vậy còn lại 216 - 120 - 6 = 90 loại khả năng để cho con xúc xắc xuất hiện hai điểm số giống nhau.

Giả sử người chơi nào đó thử vận may với con số "1". Nếu anh ta đánh đố 216 lần thử xem anh ta sẽ được bạc bao nhiêu lần?

Trước hết ta xét số tình huống để con xúc xắc xuất hiện "1" điểm. Việc xuất hiện con điểm "1" có thể chỉ ở một con xúc xắc, ở hai con xúc xắc hoặc cả ba con xúc xắc, tức là có 3 loại khả năng; ngoài ra số tình huống để hai con xúc xắc còn lại không xuất hiện số "1" là 5 x 5 = 25 loại, tổng cộng có 3 x 25 loại khả năng. Trong 75 loại khả năng xuất hiện này thì có khả năng để con bạc nhận được 2 đồng, và tổng số tiền anh ta nhận được trong trường hợp này là 75 x 2 = 150 đồng. Như vậy khả năng xuất hiện số "1" ở một con xúc xắc, xuất hiện ở con số 1 và con số 2 cũng có thể xuất hiện ở con số 1 và con số 3, cũng có thể là con số 2 và con số 3 hoặc cả 3 khả năng. Ngoài ra với mỗi con

xúc xắc có 5 loại khả năng không xuất hiện số "1" và ở cả ba con xúc xắc thì tất cả có 15 loại khả năng. Nên với mỗi lần nhận được 3 con xúc xắc với ba số "1" thì số tiền anh ta nhận được là 45 đồng. Cuối cùng số tình huống để ba con xúc xắc chỉ xuất hiện một điểm "1" chỉ có 1 loại khả năng, bấy giờ anh ta chỉ nhận được 4 đồng.

Như vậy trong 216 lần gieo, con bạc chỉ nhận được 150 + 45 + 4 = 199 đồng. Trong khi anh ta phải đặt cọc 216 đồng nên rốt cuộc con bạc đã bị lỗ 19 đồng.

Bây giờ ta xét các tình huống của nhà cái.

Giả sử có 6 người tham gia đánh bạc, đánh cược với các số "1", "2"..."6", giả sử họ cũng tiến hành 216 lần gieo xúc xắc. Nhà cái mỗi lần nhận được 6 đồng đặt cọc và số tiền đặt cọc cho 216 lần chơi sẽ là 6 x 216 = 1296 đồng. Thử xem nhà cái sẽ thu được bao nhiêu?

Theo như phân tích đã trình bày trên đây, trong 216 lần gieo, có 120 lần số điểm ở ba con xúc xắc không giống nhau. Ví như ở các con xúc xắc xuất hiện các số "1", "2", "3" thì các con bạc đánh cược cho ba số "4", "5", "6" bị thua. Nhà cái phải trả cho các con bạc thắng là 2 đồng x 3 = 6 đồng, và với 120 lần nhà cái phải trả cho các con bạc ở tình huống này là 6 x 120 = 720 đồng. Ngoài ra còn có 90 lần các con xúc xắc xuất hiện số điểm giống nhau ở hai con xúc xắc, ví như xuất hiện các điểm "1", "1", "2", vậy thì ba con bạc đánh cược số "4", "5", "6" bị thua cuộc. Người đánh cược số "2" được 2 đồng, người đánh cược số "1" được 3 đồng, nhà cái được 5 đồng, 90 lần nhà cái được 5 x 90 = 450 đồng. Cuối cùng sáu lần cả ba con xúc xắc có số điểm giống nhau, ví như đều nhận được số "1", bấy giờ người đánh cược số "1" thắng và nhận được 4 đồng, 6 lần được 24 đồng.

Cuối cùng nhà cái phải chi ra 720 + 450 + 24 = 1194 đồng. Kết quả là nhà cái lãi được 1296 - 1194 = 102 đồng, tất cả lãi được 7,9%.

Bây giờ chắc các bạn đã thấy các con bạc không hề thu được lợi lộc gì, vì vậy đừng có bao giờ tham gia đánh bạc.

Từ khoá: *Xác suất.*

Không biết các bạn có nhận thấy trong cùng một lớp, số người có cùng ngày sinh nhật quả là nhiều. Nếu không tin bạn thử làm một phép thống kê. Thế nhưng bạn có biết tại sao không? Số bạn cùng học trong cùng lớp khoảng 40 - 50 người, mà một năm có 365 ngày, tại sao các ngày sinh nhật lại có thể "chụm" nhau một chỗ.

Ta thử tính toán một chút xem để sinh nhật của bốn người không trùng vào một ngày có xác suất (khả năng) bằng bao nhiêu. Tuỳ ý chọn một bạn *A*, sinh nhật của anh ta có thể vào một ngày nào đó trong 365 ngày hay nói cách khác có 365 khả năng. Người thứ hai là *B*, người thứ ba, người thứ tư là *C* và *D* cũng có cùng tình trạng tương tự. Như vậy tình trạng về ngày sinh nhật của bốn người có đến $(365)^4$ tình huống. Thế thì số người có sinh nhật khác nhau sẽ là bao nhiêu? Để sinh nhật của *A* và *B* khác nhau thì với *B* phải trừ đi 1 ngày cùng với ngày sinh của *A* tức còn lại 364 ngày không trùng với *A*, tức có 364 khả năng không cùng ngày sinh nhật với *A*. Cũng với lí do tương tự, số khả năng để *C* không cùng ngày sinh với *A* và *B* là 363 khả năng, số khả năng để *D* không cùng ngày sinh với *A, B, C* là 362. Vì vậy số khả năng để *A, B, C, D* không sinh cùng một ngày là

$$\frac{365 \times 364 \times 363 \times 362}{(365)^4} = 0,98 = 98\%$$

Trái lại để bốn bạn *A, B, C, D* ít nhất có hai người có cùng ngày sinh là 1 - 0,98 = 0,02 = 2%.

Bây giờ ta mở rộng cho 40 người thì số khả năng để 40 người không sinh trong cùng một ngày là

$$\frac{365 \times 364 \times 363 \times 362}{(365)^{40}} = 0,1088 = 10,88\%$$

Do vậy trong số "40 người ít nhất có hai người có cùng ngày sinh" có khả năng: 1 - 0,1088 = 0,8912 = 89,12%. Khoảng 9/10 Giả sử lớp học của bạn có 45 người thì hai người có cùng ngày sinh ít nhất có đến 94,1%; còn nếu lớp của bạn có 50 người thì số hai người có cùng ngày sinh có thể lên đến 97,04%.

Bạn thử tính xem ở lớp bạn thực tế có bao nhiêu người và con số có hai người cùng sinh một ngày ít nhất là bao nhiêu?

Từ khoá: *Xác suất.*

Bóng rổ là môn thể thao được khá nhiều bạn trẻ ưa thích. Trong tình thế hết sức khẩn trương chạy về phía rổ, với động tác đẹp ném trúng vào rổ đối phương được cả cầu trường hoan hô vang dậy thì quả là điều hết sức phấn kích. Thế nhưng việc ném trúng liền hai quả vào rổ đối phương không phải là chuyện dễ. Vì sao vậy?

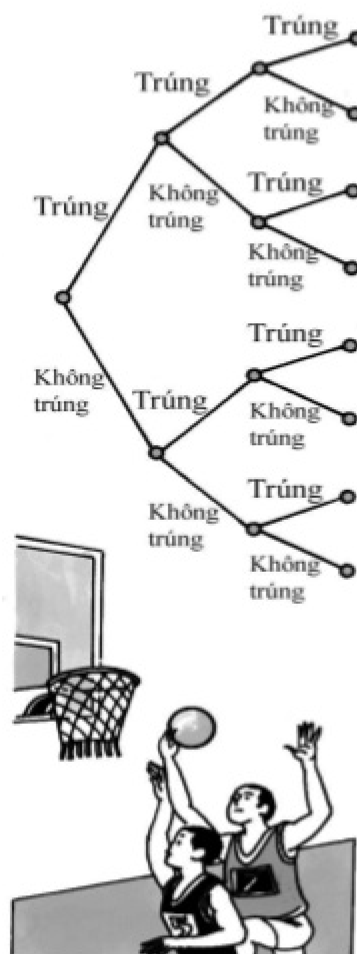
Giả sử có người ném rổ với xác suất trúng đích là $^1/_2$ thì trung bình cứ hai lần ném rổ sẽ có một lần trúng đích. Nếu ném liền hai quả thì có thể có 4 tình huống xảy ra: trúng, trúng; không trúng, trúng; không trúng, không trúng; trúng; không trúng. Cơ hội xuất hiện các tình huống là như nhau. Cũng lí luận tương tự khi ném liền ba quả về phía rổ thì xuất hiện tám tình huống có cơ hội xuất hiện như nhau.

Nói chung khi ném n lần liền thì có 2^n tình huống có cơ hội xuất hiện như nhau. Khả năng xuất hiện hai lần ném trúng rổ liên tiếp trong 2n lần ném sẽ là $^1/_{2n}$. Nếu ném 10 lần thì khả năng ném trúng hai lần liên tiếp là $^1/_{210}$ = $^1/_{1024}$ tức khả năng chưa đến một lần trong 1000 lần ném, từ đó cho thấy mức độ khó thực hiện của sự kiện đưa ra.

Cũng có người chưa thực sự tin vào kết luận đó, cho rằng điều đó chỉ đúng đối với đấu thủ ném rổ kém, còn các đấu thủ ném rổ tốt chắc không đến nỗi như vậy.

Xin các bạn chú ý, đối với các đấu thủ xác suất ném trúng đích là $^1/_2$, thì sau n lần ném khả năng ném trúng hai lần liền là $^1/_{2n}$ tức $(^1/_2)^n$. Nếu với một đấu thủ ném rổ giỏi có xác suất ném trúng rổ đến $^9/_{10}$ (!) thì sau 10 lần ném rổ xác suất ném trúng đích hai lần liền là $(^9/_{10})^n \approx$ 0,34867844, ước khoảng đạt được $^1/_3$, khả năng thành công của hai lần ném trúng rổ liên tiếp cũng không đến $^1/_2$. Do đó ngay với các đấu thủ ném rổ rất giỏi thì khả năng ném rổ trúng đích hai lần liên tiếp không phải là việc dễ thực hiện.

Sự kiện trên đây gợi ý cho ta trong nhiều công việc hàng ngày. Ví dụ khi bắn bia, việc bắn trúng mấy phát đạn liền vào đích là việc không khó lắm nhưng nếu muốn trở thành một người bắn trăm phát trăm trúng thì quả là điều không dễ làm. Ví dụ với một lái xe, lái một vạn kilômét, 2 vạn kilomet an toàn là dễ thấy nhưng lái xe được 40 vạn kilomet an toàn thì là điều khá hiếm.



Từ khoá: *Xác suất.*

Chúng ta thường thích đánh cờ. Thế trong hàng ngàn, hàng vạn cuộc cờ liệu có thể có hai cuộc cờ giống nhau từ đầu đến cuối? Chúng ta thử làm một bước phán đoán từ góc độ toán học.

Ví dụ khi đánh cờ vây, trên bàn cờ có 361 vị trí. Về lí thuyết với con cờ đầu tiên có đến 361 nước đi (khi đi bốn con cờ đầu tiên có 357 cách đặt con cờ). Đương nhiên, con cờ đầu tiên không thể đặt bên ngoài biên xa, nên sự thực các vị trí đi không đến nỗi quá nhiều như vậy. Chúng ta chỉ cần tính là 50 khả năng. Trên thực tế con cờ thứ hai số vị trí có thể đặt được không chỉ ở trong phạm vi 50 vị trí, chúng ta chỉ chọn 50 khả năng.

Như vậy hai bên quân đen trắng có thể thay đổi và có đến 50 x 50 = 2500 loại. Nếu hai bên đen trắng đi 50 con cờ, giả sử rằng mỗi con cờ có 50 cách đi khác nhau, thế thì có đến 50^{100} cách biến hoá. 50^{100} là con số có đến 170 vị trí. Nếu chúng ta dùng các số 1 vạn, 10 vạn làm đơn vị đo thì cũng không thể đếm xuể. Chưa nói đến việc đánh cờ, chỉ cần khi đếm từ một đến 100 ta có khoảng thời gian 50 giây, với các số từ 100 trở lên thì việc đếm số cần tốn nhiều thời gian hơn, số càng lớn thì thời gian đếm càng lâu. Khi đếm đến 1000 thì cần 500 giây, đếm đến 100 triệu cần đến 50 triệu giây (cần khoảng 14.000 giờ). Mỗi ngày có 24 giờ, để đếm đến con số 100 triệu, cần đến 500 ngày không ăn không uống. Một người sống đến 100 tuổi, bắt đầu đếm từ lúc mới sinh đếm liên tục đến 100 tuổi, tức không quá 36525 ngày, thì cũng chưa đếm đến con số 10 tỉ (một con số có 11 chữ số!), còn đổi chỗ cho 170 vị trí các số nguyên so với con số 10^{159} thì còn lớn hơn nhiều! Bạn xem cơ hội lặp lại là bao nhiêu phần.

Ta thử xem các tình huống cho một cuộc cờ tướng. Trong phép đi cờ tướng lúc mới chơi tình thế biến hoá không quá nhiều. Thế nhưng càng về sau khi số quân cờ bị loại khỏi bàn cờ càng nhiều thì số biến hoá càng nhiều. Với con xe có thể có 10 loại nước đi tiến, lùi, qua trái, qua phải. Vì vậy khi đi một nước cờ có thể có 10 đến 20 loại biến hoá. Nếu cả hai bên tiến hành 30 nước đi thì đã có đến 10^{60} cách biến đổi, tức là con số có 61 chữ số. So với con số có 11 chữ số thì con số này lớn đến khó tưởng tượng nổi.

Vì vậy khi đánh cờ khả năng có các cuộc cờ giống nhau hoàn toàn từ đầu đến cuối quả là quá bé.

Từ khoá: *Xác suất.*

Từ nhà bạn Minh đến trường học có hai tuyến xe công cộng đều có thể đi đến trường, tuyến xe 101 và tuyến xe 105. Các xe trên hai tuyến xe được đánh số như nhau, tuyến xe từ nhà đến trường học cũng như nhau và cứ cách 15 phút lại có một chuyến xe. Hầu như bạn Minh ngày nào cũng đến trường bằng xe buýt, thời gian bạn lên xe cũng không nhất định, xe nào đến trước là Minh lên xe. Theo lí mà nói, cơ hội để bạn Minh lên hai tuyến xe là như nhau (xác suất), nên các số lần đi xe mà Minh đi trên hai tuyến xe ắt phải như nhau, nếu không hoàn toàn giống nhau thì cũng không khác nhau quá nhiều. Nhưng thực tế không phải như vậy. Minh đã ghi lại tình hình đi xe của mình hàng ngày và sau mấy tháng cậu ta phát hiện số lần mà cậu ta đi tuyến xe 105 đến 80% còn số lần đi tuyến 101 chỉ có 20%. Lịch trình chạy của hai tuyến xe là hoàn toàn như nhau, tại sao lại có tình huống đó.

Nguyên do là sau khi xe 101 khởi hành thì 12 phút sau chiếc xe 105 mới khởi hành, còn sau khi xe 105 khởi hành ba phút lại có một chiếc xe tuyến 101 khởi hành. Bây giờ ta chia thời gian thành từng khoảng 15 phút (không tính đến việc bạn Minh đến bến xe vào lúc nào trong khoảng 15 phút đó). Nếu Minh đến bến xe trước phút thứ 12 trong khoảng 15 phút thì Minh nhất định phải đi tuyến xe 105. Minh chỉ đi tuyến xe 101 nếu đến bến sau trong vòng ba phút sau đó. Cơ hội để Minh đến bến trước 12 phút là $^{12}/_{15}$ = 80% còn cơ hội đến bến ở 3 phút sau đó là $^{3}/_{15}$ = 20%. Vì vậy khả năng Minh đi tuyến xe 105 gấp 4 lần khả năng đi xe trên tuyến 101.

Ta có thể lập thời gian biểu của các tuyến xe. Giả sử thời gian đến bến của các xe thuộc tuyến 101 là 6,00; 6,15; 6,30; 6,45; 7,00... thì thời gian đến bến của tuyến xe 105 là 6,12; 6,27; 6,42; 6,57; 7,12... Như vậy nếu Minh đến bến từ 6,00 đến 6,12 thì cậu ta sẽ đi tuyến xe 105; chỉ khi Minh đến bến xe từ 6,12 - 6,15 thì mới đi tuyến xe 101. Cũng cùng lí do tương tự, khi Minh đến bến trong khoảng từ 6,15 - 6,27; 6,30- 6,42; 6,45 - 6,57... thì sẽ đi tuyến xe 105; còn nếu đến bến trong khoảng 6,27 - 6,30; 6,42 - 6,45; 6,57 - 7,00... thì sẽ đi tuyến 101 v.v... khả năng đi hai tuyến xe của Minh theo tỉ lệ 4: 1.

Từ khoá: *Xác suất.*

121. Vì sao nói "Ba người cùng đi với ta, ắt có một người là thầy ta"?

Chắc các bạn đã từng nghe câu nói: “Ba người cùng đi với ta ắt có người là thầy ta”. Đó là câu nói trong sách “Luận ngữ” trích lời nói của Khổng Tử, một học giả lớn thời cổ đại. Tuy Khổng Tử là một người có học vấn rất cao nhưng ông vẫn hay khiêm nhường mà nói với mọi người như vậy. Thế nhưng thực tế thì thế nào?

Cần phải làm rõ vấn đề này: Không cần phải mọi mặt đều là ưu tú hơn mọi người mới là “người thầy”. Nếu có người nào đó có một mặt nào đó tỏ ra ưu tú hơn người khác thì người đó có thể là thầy về phương diện đó. Ý của Khổng Tử cũng chính là như vậy.



Ta chia tài năng của người làm ba phương diện; đức, trí, thể. Nếu như trong cả ba phương diện, Khổng Tử đều thuộc loại ưu tú; nói cách khác trong số ba người, Khổng Tử đều là hàng đầu, thì hai người kia không ai xứng đáng là thầy của Khổng Tử cả. Nếu đánh giá tài năng của Khổng Tử về ba mặt: đức, trí, thể thì có thể có 3^3 = 27 cách phân loại sau đây:

Đức	**1 1 1 1 1 1 1 1 1**	**2 2 2 2 2 2 2 2 2 3...**
Trí	1 1 1 2 2 2 3 3 3	1 1 1 2 2 2 3 3 3 1...
Thể	1 2 3 1 2 3 1 2 3	1 2 3 1 2 3 1 2 3 1...

Trong 27 loại khả năng này thì Khổng Tử được ở hàng đầu cả ba phương diện, chỉ có một loại chiếm $^1/_{27}$ còn ở 26 loại khác Khổng Tử được xếp ở hàng đầu ở một số mặt mà không phải cả ba mặt, trong các cách sắp xếp thì có 26 loại như vậy tức chiếm $^{26}/_{27}$, như vậy trong số 2 người cùng đi người có tư cách làm thầy Khổng Tử có khả năng (xác suất) đến $^1/_{27}$ ≈96,3%.

Còn có cách tính toán khác để tính các khả năng này. Khả năng để về phương diện Đức, Khổng Tử xếp hàng đầu là $^1/_3$, về mặt Trí, khả năng để Khổng Tử được xếp ở hàng đầu là $^1/_3$, vì vậy ở cả hai mặt Đức và Trí để Khổng Tử đều được xếp hàng đầu thì khả năng có thể là $^1/_3$ x $^1/_3$. Lí luận tương tự để cả ba mặt: Đức, Trí, Thể, Khổng Tử đều xếp ở hàng đầu có khả năng là $^1/_3$ x $^1/_3$ x $^1/_3$ = $(^1/_3)^2$.

Đương nhiên việc chúng ta đánh giá khả năng của một người chỉ dựa vào 3 mặt là còn quá sơ lược. Tục ngữ có câu “Có 360 con đường, đi cho hết ngả rồi cũng trở thành xuất chúng”. Ta cũng thử chia tài năng của người thành 360 phương diện. Ngoài ra, Khổng Tử là một học giả lớn, nên với bất kì nhóm ba người nào, khả năng để Khổng Tử xếp ở hàng đầu không chỉ ở $^1/_3$. Chúng ta giả thiết với mỗi người bất kỳ, khả năng để Khổng Tử nhường bước không lớn hơn 1%, nói cách khác, với một phương diện bất kì nào đó khả năng để anh ta thua Khổng Tử phải đến 99%. Chúng ta lại thử tính toán khả năng về câu nói “Ba người cùng đi ắt có người là thầy ta”. Với hai người cùng đi khả năng để họ không hơn Khổng Tử là 99% x 99% = 98.01%. Trong 360 phương diện khả năng để hai người kia không hơn Khổng Tử là $(98,01)^{360}$ = 0,07%. Ngược lại với hai người còn lại, trong một phương diện nào đó để họ hơn Khổng Tử là 1 - $(98,01)^{360}$ = 99,93%; nên với hai người còn lại, trong một phương diện nào đó để họ vượt Khổng Tử là 99,93%.

Chúng ta biết tuy câu nói "Ba người cùng đi ắt có một người là thầy ta" là câu nói khiêm nhường của Khổng Tử, nhưng thực tế cũng có nhiều ý nghĩa.

Từ khoá: *Xác suất.*

122. Vì sao nói trong âm nhạc cũng cần đến toán học?

Chúng ta đều biết âm thanh là do chấn động sinh ra, âm thanh cao hay thấp là do tần số của chấn động quyết định. Nét đẹp của một khúc nhạc là "giai điệu", là sự phối hợp lẫn nhau giữa nhiều âm thanh về độ dài, cường độ hoặc phát ra đồng thời hoặc theo thứ tự trước sau đem lại. Giai điệu là sự cảm nhận về tâm lí, nhưng người ta cũng nhanh chóng nhận ra cơ sở vật chất thực sự của giai điệu. Hoặc nếu dùng toán học để giải thích: khi hai hoặc nhiều âm thanh có tỉ số các tần số là tỉ số của hai số nguyên tối giản thì chúng là giai điệu. Tỉ số tối giản đương nhiên là $^1/_2$. Trong âm nhạc, nếu tỉ số tần số hai âm thanh bằng $^1/_2$ thì âm thanh có tần số cao là âm có cùng tên và cách nhau một bát độ hay còn gọi là quãng tám. Như âm (nốt) đô và âm có tần số cao gấp đôi là âm "đố" là hai âm có tên như nhau nhưng âm đố có độ cao cao hơn âm đô một quãng tám. Xét về tính đơn giản thì tỉ số 2/3 đứng sau tỉ số 1/2. Âm thanh có tần số gấp 3/2 lần tần số âm đô là âm sol...Theo cùng một ý tưởng đó, loài người đã phát minh ra âm giai bảy âm trong âm nhạc gọi là "âm luật" bảy âm. Trong bảng dưới đây sẽ dẫn ra tần số âm giai bảy âm trong "âm luật" bảy âm (giả thiết tần số âm đô là 520 hec, các tần số chỉ ghi phần chẵn, bỏ qua phần lẻ) cũng như tỉ số giữa tần số các âm so với âm "đô" tương ứng:

Âm giai	Đô	Rê	Mi	Pha	Sol	La	Si	"Đố"
Tần số	520	585	650	693	780	867	975	1040
Tỉ số của tần số so với âm "đô"	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2

Từ bảng này chúng ta thấy các hợp âm thường dùng trong âm nhạc là nhóm ba âm (nốt), ba âm này tập hợp thành nhóm ba nốt gọi là hợp âm (ví dụ các hợp âm đô - mi - sol và sol - si - rê), tỉ số các tần số ba âm trong hợp âm tỉ lệ với 4: 5: 6 là những hợp âm tạo nên cảm giác hùng mạnh, trong sáng. Hợp âm khác cho cảm giác đẹp đẽ, thâm trầm, tinh tế là các hợp âm la - đố - mí và mi - sol - si có tỉ số các tần số tỉ lệ với 3 số 10 : 12 : 15. Các loại hợp âm tạo thành có các tỉ số tần số của chung tỉ lệ với các tỉ số đơn giản như trên tạo nên cảm giác êm tai, hết sức dễ chịu.

"Âm luật" âm giai bảy âm được phát minh ở Trung Quốc khoảng 1200 năm trước Công nguyên vào thời vua Vũ Vương nhà Chu. Về sau ở Trung Quốc còn phát minh quy tắc hết sức đơn giản để tính tần số các nốt trong âm giai, đó là phương pháp "chia ba kết hợp tăng giảm" được người đời sau cho là một phát hiện tài tình trong lịch sử âm nhạc. Phương pháp tính tần số các nốt trong âm giai theo quy tắc "chia ba - tăng - giảm" được thực hiện như sau: chọn một dây đàn phát ra âm "đô" khi dùng cả độ dài của dây. Cắt bỏ $^1/_3$ độ dài của dây ("chia ba bỏ 1") còn lại $^2/_3$, tần số của âm do dây mới phát ra sẽ là $^3/_2$ tần số âm "đô", đó chính là âm "sol" (nốt sol). Lại lấy dây phát âm sol làm gốc, tăng độ dài của dây $^1/_3$(tức "chia ba tăng một") nghĩa là dây mới có độ dài bằng $^4/_3$ độ dài dây phát âm sol, tần số do dây mới phát ra chỉ bằng $^3/_4$ tần số âm sol, tức dây mới phát ra âm "rê". So với âm "đô" thì âm "rê" có tần số $^3/_2$ x $^3/_4$ = $^9/_8$; sau đó lại "chia ba bớt một" ta lại được âm "la", tiếp tục "chia ba tăng một" ta được âm "mi"...Như vậy bằng cách sử dụng xen kẽ quy tắc "chia ba - tăng - giảm" ta có thể nhận được tần số toàn bộ các nốt trong âm giai theo "âm luật bảy âm". Tính toán tần số theo quy tắc này so với âm luật bảy âm, chỉ mắc sai số nhỏ hơn 2,5%.

Âm luật của âm giai bảy âm giải quyết rất tốt vấn đề "giai âm" nhưng không giải quyết được vấn đề chuyển âm điệu, bởi vì khi thực hiện chuyển âm điệu sẽ xuất hiện các tần số so với tần số giai điệu gốc có sự khác biệt nhỏ. Để giải quyết vấn đề chuyển âm điệu mà vẫn bảo đảm được tần số cơ bản của âm giai theo âm luật bảy âm, người ta phát minh quy tắc "luật bình quân mười hai".

Theo luật này, người ta chia quãng tám từ đô đến đố thành 12 bán âm bằng nhau (bình quân theo 12). Từ đó ta có các âm giai các bán âm là: đô, đô# (đô thăng), rê, rê#, mi, fa, fa#, sol, sol#, la, si^b (si giáng), si và đố. (Dấu # gọi là dấu thăng biểu thị âm có dấu thăng được tăng độ cao một bán âm; dấu b là dấu giáng biểu thị âm có dấu b giảm độ cao một bán âm, đương nhiên là ví dụ Đo# = Re^b vv...). Ở đây dùng thuật ngữ bình quân theo nghĩa là trung bình nhân, nghĩa là tỉ số của một tần số âm nào đó với một tần số của âm đứng liền trước đó đều bằng nhau. Người ta dễ dàng tính được tỉ số này là $\sqrt[12]{2} = 1,059463$. Dưới đây trình bày tần số các âm (nốt) trong âm giai tính theo âm luật bảy âm và "luật bình quân theo 12". So sánh tần số các nốt tính theo hai âm luật ta thấy chúng sai khác nhau trong khoảng 0,8%.

Âm giai	Đô	Rê	Mi	Pha	Sol	La	Si	Đô
Tần số tính theo âm luật bảy âm	520	585	650	693	780	867	975	1040
Tỉ số tính theo "bình quân theo 12"	520	584	655	694	779	874	982	1040

Các loại đàn như Pianô, thụ cầm (đàn harpe) có các nốt ấn định độ cao theo luật "bình quân theo 12", còn độ cao của sáo đồng có độ cao các nốt theo âm luật bảy âm. Do các nốt của hai loại âm giai có tần số không khác nhau nhiều nên cả hai loại nhạc khí đều có thể hoà tấu với nhau trong dàn nhạc.

Từ khoá: *Âm nhạc; Tần số âm;âm giai; âm luật bảy âm.*

123. Vì sao dùng toán học có thể phán đoán tác giả của tác phẩm "Hồng Lâu Mộng"?

"Hồng Lâu Mộng" là một tác phẩm văn học cổ điển nổi tiếng của Trung Quốc. Theo nhiều nhà Hồng học (chỉ các tác giả chuyên nghiên cứu tác phẩm "Hồng Lâu Mộng"), 80 hồi đầu của tác phẩm này do Tào Tuyết Cần sáng tác, còn tác giả của 40 hồi cuối là Cao Ngạc. Ý kiến này có đúng không? Các nhà toán học đã dùng toán học để phán đoán.

Dùng toán học để phán đoán tác giả một tác phẩm văn học đã có tiền lệ ở nhiều nước. Ví dụ ở Liên Xô trước đây đã từng có cuộc tranh luận: Liệu có phải Sôlôkhôv là tác giả bộ tiểu thuyết vĩ đại "Sông Đông êm đềm" không? Cuối cùng nhờ lí luận của phương pháp toán học thống kê người ta đã khẳng định chính Sôlôkhôv là tác giả của bộ tiểu thuyết này.

Chúng ta đã biết, từ xưa đến nay, mỗi tác giả đều có phong cách viết riêng. Ví dụ trong văn phong Trung Quốc cổ, có người thích dùng hư từ "chi", "hồ", có người thích dùng "giả", "dã". Dựa vào tần số xuất hiện của các từ nhiều hay ít người ta có thể nhận ra được các phong cách viết văn khác nhau của các tác giả, nhờ đó người ta nhận dạng được tác giả của từng tác phẩm.

Dựa vào lí luận đó, học giả Trung Quốc Lí Hiền Bình đã vận dụng 47 hư từ, tìm tần suất xuất hiện của mỗi hư từ trong từng hồi, thông qua các số liệu thống kê đã tìm ra đặc điểm phong cách viết của các hồi, và người tìm thấy kết luận của các nhà Hồng học là chính xác. Đây là lần đầu tiên dùng phương pháp toán học đã chứng minh cho ý kiến các nhà Hồng học.

Đây là kết quả được công bố trong bài báo "ý kiến mới về tác phẩm Hồng Lâu Mộng" đăng trong "Phục Đán học báo" của Nhà xuất bản Khoa học xã hội số tháng 3-1987. Đây là thành tựu nổi bật đầu tiên của việc vận dụng toán học để nghiên cứu văn học trong lịch sử văn học Trung Quốc.

Từ khoá: *Phương pháp toán học; Thống kê; Tần số.*

124. Hiệu buôn mỗi lần nhập bao nhiêu hàng là hợp

lí?

Các hiệu buôn bán hàng cho khách đồng thời phải nhận hàng từ các nhà sản xuất, nhà máy hoặc mua từ các cửa hiệu khác. Thông thường khi buôn bán một kiện hàng, ngoài mục đích thu hồi vốn còn có mục đích thu về một món tiền lãi nào đó. Với mỗi hiệu buôn, việc nhập hàng thường thực hiện định kì trong từng khoảng thời gian nhất định (ví dụ trong thời hạn một tháng). Nếu một lần nhập quá ít hàng hoá thì sẽ thiếu hàng bán và sẽ bỏ lỡ cơ hội thu lãi. Trái lại nếu lượng hàng nhập vào quá lớn thì hàng không kịp bán hết sẽ gây nên tình trạng thừa ứ hàng và gây tổn thất cho cửa hàng. Vì vậy việc cửa hàng nhận lượng hàng nhiều ít có liên quan mật thiết với khả năng tiêu thụ hàng hoá trong một khoảng thời gian. Thế nhưng mức độ tiêu thụ hàng hoá lại không do các chủ hiệu buôn bán quyết định, khả năng tiêu thụ hàng hoá là một đại lượng không xác định được mà chỉ có thể ước lượng. Vậy các cửa hiệu phải nhập lượng hàng bao nhiêu thì đạt được lợi nhuận tối đa?

Chúng ta sẽ giải đáp câu hỏi này qua một ví dụ cụ thể dưới đây:

Một cửa hàng thời trang chuẩn bị nhập một lô hàng về để bán. Khi buôn bán thịnh vượng, mỗi kiện hàng bán được sẽ thu về 50 đồng tiền lãi. Khi thời vụ qua đi, để tránh việc làm chậm chu chuyển vốn, đọng vốn, người ta không thể không giảm giá bán; ngoài ra còn phải tính đến hao phí do bảo quản, lưu kho, ước lượng mỗi kiện hàng có thể bị lỗ 10 đồng. Trước khi nhập hàng, cửa hàng phải làm một cuộc điều tra và ước lượng khả năng có thể bán được 40-50 kiện hàng. Cụ thể khả năng có thể bán hàng như sau:

Tổng số kiện hàng bán ra	**Nhỏ hơn 40**	**40**	**41**	**42**	**43**	**44**
Khả năng(%)	0	5	7	8	10	12
Tổng số kiện hàng bán ra	45	46	47	48	49	50
Khả năng(%)	15	12	10	9	7	5

Để cửa hàng nhận được lợi nhuận tối đa, cần phải nhập bao nhiêu hàng?

Giả sử x là số kiện hàng cần nhập, đương nhiên là x phải trong khoảng 40 - 50 kiện. Nếu $x <$ 40 thì tất nhiên sẽ đưa đến tình trạng thiếu hàng để bán. Nếu $x > 50$ có thể đưa đến sự thừa ứ hàng. Cả hai trường hợp đều không nên. Dưới đây ta sẽ xét các trường hợp cửa hàng nhận x kiện hàng trong khoảng từ 40 - 50 và tính toán lợi nhuận bình quân mà cửa hàng nhận được tương ứng. Khi $x = 40$ hàng bán hết và không hề bị thừa ế, lợi tức mà cửa hàng nhận được sẽ là:

50 đồng x 40 = 2000 đồng



Nếu $x = 41$, thì khả năng bán được hết là 40, thừa 1 kiện và có khả năng 1-5% = 95% bán hết toàn bộ và không có tình trạng ế hàng. Vì vậy lợi nhuận bình quân sẽ là:

(50 x 40 - 10 x 1) x 5% + (50 + 41) x 95% = 2047đồng

Khi *x* = 42 có 5% bán hết 40 kiện và ế hai kiện, có 7% bán hết 41 kiện thừa một kiện, còn lại thì có khả năng bán

hết hàng và không ế kiện nào. Khả năng bán hết hàng là

1 - 5% - 7% = 88%. Vì vậy lợi nhuận bình quân thu được sẽ là:

(50 x 40 - 10 x 2) x 5% + (50 x 41 - 10 x 1) x 7% + (50 x 42) x 88% = 2089,8 đồng.

Bảng dưới đây trình bày kết quả tính toán lợi nhuận khi số kiện hàng nhập vào từ 40 - 50.

Từ kết quả tính toán cho thấy khi cửa hiệu nhập 48 kiện hàng thì sẽ nhận được lợi nhuận tối đa.

Số kiện hàng nhập	**40**	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**
Lợi nhuận (đ)	2000	2047	2089,8	2127,8	2159,8	2184,6
Số kiện hàng nhập	46	47	48	49	50	
Lợi nhuận (đ)	2200,4	2209	2211,6	2208,6	2201,8	

125. Làm thế nào mà các cửa hiệu có thể khống chế chất lượng hàng hoá nhập?

Khi đi mua hàng người ta hy vọng mua được hàng hoá chất lượng tốt nên khi chọn hàng, nói chung họ phải đọc kĩ giấy chứng nhận chất lượng hàng hoá. Về mặt cửa hàng, nhằm giữ gìn uy tín của khách hàng với cửa hàng, trước khi nhập hàng chủ cửa hiệu cũng phải kiểm tra cẩn thận chất lượng hàng hoá nhập. Làm thế nào mà cửa hàng có thể nắm chắc được chất lượng hàng hoá nhập?

Trên thực tế, trước khi cửa hiệu nhập hàng họ cũng phải đọc kĩ các chứng chỉ chất lượng thương phẩm, đồng thời phải kiểm tra chất lượng thực của thương phẩm. Chúng tôi xin nêu ra một ví dụ để thuyết minh cửa hiệu kiểm tra chất lượng hàng hoá bằng cách nào?

Giả sử cửa hàng nhận tiêu thụ sản phẩm bóng đèn cho một nhà máy nào đó. Nhà máy cung cấp chứng chỉ chất lượng ghi tuổi thọ bóng đèn không ít hơn 2000 giờ cho phép sai 200 giờ. Chủ hiệu muốn biết thực sự bóng đèn có phù hợp với chứng chỉ chất lượng hay không, liền chọn lấy 10 bóng đèn để kiểm tra. Việc đo tuổi thọ của bóng đèn được thể hiện trên bảng số liệu sau (đơn vị: giờ).

2250, 1580, 1790, 3020, 1850, 2360, 1430, 2050, 1960, 1690. Tính ra tuổi thọ trung bình của 10 bóng đèn là 1998 giờ nhỏ hơn 2000 giờ. Liệu có phải tuổi thọ bóng đèn không phù hợp với chứng chỉ chất lượng của nhà máy không? Và cửa hàng không nên nhận lô hàng này không?

Không phải vậy, giấy chứng chỉ chất lượng của nhà máy là chỉ tuổi thọ trung bình của bóng đèn không ít hơn 2000 giờ là cho toàn lô bóng đèn của nhà máy. Khi tiến hành kiểm tra chỉ lấy 10 bóng đèn để kiểm tra, các kết quả kiểm tra tất nhiên có tính ngẫu nhiên và không hoàn toàn đại diện cho bóng đèn của nhà máy. Giả sử nếu sự thực bóng đèn của nhà máy có thể lớn hơn 2000 giờ. Nếu như chủ cửa hàng vì tuổi thọ trung bình của 10 bóng đèn nhỏ hơn 2000 giờ mà không nhập hàng thì có thể sẽ mắc phải sai lầm. Vì tuổi thọ của bóng đèn là không giống nhau, khi kiểm tra hàng mẫu cũng mang tính ngẫu nhiên, vì thế không thể tránh khỏi sai sót. Cả hai phía nhà máy và cửa hiệu đều mong muốn khả năng phạm phải sai lầm loại này là nhỏ nhất, và khống chế loại sai lầm này không quá 10%. Muốn làm được việc đó phải dùng phương pháp thống kê.

Theo các kinh nghiệm trong quá khứ, đại đa số lô bóng đèn có tuổi thọ tiếp cận với tuổi thọ trung bình, các bóng đèn có tuổi thọ khác với tuổi thọ trung bình là rất ít. Theo ngôn ngữ thống kê tuổi thọ của bóng đèn tuân theo luật phân bố chuẩn. Vì vậy nếu đứng về phía nhà máy thì việc lấy 10 bóng đèn để kiểm tra, tuổi thọ trung bình của chúng phải tiếp cận tuổi thọ trung bình là 2000 giờ. Theo kết quả tính toán, tuổi thọ trung bình của các bóng đèn nhỏ hơn 1919 giờ có khả năng không quá 10%. Nếu kết quả kiểm tra nhỏ hơn 1919 giờ, cửa hiệu sẽ đánh giá là lô hàng không đủ tiêu chuẩn và không nhận lô hàng. Khi đó sai lầm loại bỏ sự thật bảo đảm không quá 10%. Hiện tại kết quả kiểm tra cho thấy tuổi thọ trung bình của bóng đèn là 1998 giờ vì vậy cửa hàng sẽ không cự tuyệt việc nhận lô hàng.

Đương nhiên ngoài nguy cơ loại bỏ cái tốt còn đề phòng việc nhận nhầm cái xấu. Việc nhận nhầm là chỉ việc nhận nhầm phải sản phẩm kém chất lượng, nhận sản phẩm không hợp cách do kết quả kiểm tra nhầm, sản phẩm xấu lại trở thành tốt. Trong kiểm tra sản phẩm cũng không loại bỏ được hoàn toàn sai lầm kiểm tra nhầm mà chỉ có thể khống chế để sai lầm có thể bị hạn chế trong một giới hạn nào đó.

Từ khoá: *Độ lệch chuẩn; Loại bỏ cái thật; Nhận nhầm.*

126. Vì sao trong các túi đựng thực phẩm người ta thường ghi xx g ± x g?

Trong cuộc sống, chúng ta thường cần phải mua bánh ngọt, sữa bột, đường, muối ăn và những thực phẩm thường dùng hàng ngày khác. Ta thường thấy trên bao bì có ghi trọng lượng ròng ghi rõ khối lượng vật phẩm. Nhưng cũng có các bao bì ghi trọng lượng tinh 500 ± 2 g v.v... Như vậy có nghĩa là gì? Con số 500 và 2 có gì khác nhau?

Trong cuộc sống hiện đại, các thương phẩm thường được đóng gói hoàn chỉnh bằng máy đóng gói. Ví dụ theo quy định các túi sữa phải được đóng 500 g. Nhưng do máy đóng gói có khiếm khuyết, do dòng chảy không đều cũng như thao tác của các nhân viên đóng gói và nhiều nguyên nhân khác, trọng lượng sữa trong túi sữa có thể có sai khác với quy định chút ít. Nói chung trên bao bì ghi 500 g chỉ trọng lượng ròng trung bình, còn "±" chỉ ra rằng sự sai lệch có thể về hai phía dương hoặc âm, 2 gam là chỉ sai số trung bình theo tiêu chuẩn có thể mắc phải.



Khi ta lấy bất kì 100 túi để kiểm tra thì chất lượng tinh mỗi túi có thể là X g, X là một con số không xác định có thể là 501 g, hoặc 498 g, hoặc có thể là 500 g. X được gọi là đại lượng thay đổi. Kết quả cân đo được dẫn ra trong bảng dưới đây:

Trọng lượng ròng	**495**	**496**	**497**	**498**	**499**	**500**	**501**	**502**	**503**	**504**	**505**
Số túi	1	2	8	13	15	22	17	11	6	4	1
Tỉ lệ	0,01	0,02	0,08	0,13	0,15	0,22	0,17	0,11	0,06	0,04	0,01

Vì vậy với một túi sữa bất kì, khả năng để trọng lượng ròng của sữa X = 495 g chỉ là 1%, X = 496 chỉ là 2% v.v...tương ứng với các tỉ lệ (xác suất) p = 0,01. 0,02... hay người ta có thể viết p (X = 495) = 0,01 v.v... và tổng các xác suất phải bằng 1. Giá trị p được gọi là xác suất của biến số X để X lấy một giá trị nào đó hay nói cách khác đó là luật phân bố của biến số X. Dựa vào luật phân bố người ta có thể tính giá trị trung bình a của đại lượng biến thiên X.

a = 495 x 0,01 + 406 x 0,02 + ... +504 x 0,04 + 505 x 0,01 = 500 và giá trị trung bình là 500 g.

Ta lại tính sai số của đại lượng X với số trung bình X - a, ở đây có 11 loại sai số -5, -4,... 4 và 5. Sai số lớn nhất là 5. Sai số bình quân b sẽ là:

b = |-5| x 0,01 + |-4| x 0,02 +..+ (4) x 0,04 + (5)x 0,01 =1,56

Tức sai số trung bình là 1,56.

Một phương pháp tính sai số khác là tính phương sai σ2.

$\sigma^2 = (-5)^2$ x 0,01 + $(-4)^2$ x 0,03 +...+4^2 x 0,03 +5^2 x 0,01 = 4 và σ = 2. Người ta gọi σ là độ lệch chuẩn. Phương sai và độ lệch chuẩn phản ánh sai số của phép đo.

Vì vậy để biểu diễn rõ ràng trọng lượng tịnh phải biểu diễn 500 ± 5 g với sai số lớn nhất hoặc 500 ± 1,56 với sai số tuyệt đối hoặc 500 ± 2 g biểu diễn với độ lệch chuẩn.

Từ khoá: *Biến số; Xác suất; Luật phân bố sai số; Sai số trung bình; Độ lệch chuẩn; Sai số cực đại.*

127. Vì sao mua hàng trong bao hàng lớn rẻ hơn trong bao hàng nhỏ?

Không biết các bạn có chú ý đến việc hàng hoá trong các siêu thị, nếu hàng trong bao lớn sẽ có đơn giá rẻ hơn trong bao hàng nhỏ với cùng một loại hàng. Trước tiên đó là do chủ hàng muốn khuyến khích khách hàng mua hàng trong túi hàng lớn, hàng sẽ bán được nhiều hơn. Nhưng đó không phải là tất cả.

Có nhiều yếu tố ảnh hưởng đến đơn giá các loại hàng. Nói chung đơn giá của các loại hàng hoá bao gồm: giá thành sản xuất, phí lưu thông, bao bì, nhu cầu của thị trường. Trong đó giá thành sản xuất, phí lưu thông được xem là yếu tố chính ảnh hưởng đến đơn giá hàng hoá tính theo trọng lượng. Giá thành của vật liệu sản xuất bao bì không đóng vai trò chính trong đơn giá tính theo trọng lượng, nhưng có vai trò lớn trong đơn giá, tính theo diện tích bề mặt của hàng hoá. Vì vậy chúng ta cần làm rõ hơn mối quan hệ giữa khối lượng và diện tích bề mặt của hàng hoá.

Ví dụ các hộp đựng ống nghe nhạc thường có dạng hình trụ. Giả sử đường kính đáy hình trụ là D, chiều cao h thì thể tích và diện tích hình hộp được tính theo:

Thể tích V = $^{\pi}/_{4}D^2$h và diện tích D = $^{\pi}/_{4}D^2 + \pi D$h. Nếu ta lại thiết kế các chiếc hộp có đường kính đáy bằng chiều cao thì

$$V = {}^{\pi}/_{4}D^{23} \text{ và } S = {}^{3}/_{2}\,\pi D^2$$

Vì khối lượng của hàng hoá được tính theo:

Khối lượng $W = K_1V = {}^{\pi}/_{4}K_1D^3$

K1 là khối lượng riêng của hàng hoá. Vì vậy ta có:

$$D = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi K_1}W}\ ; S = \frac{3\pi}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{4}{\pi K_1}W}\right)^2 = K^2\frac{W^2}{3}$$

trong đó, $I_2 = \frac{3\pi}{2}\sqrt[3]{\frac{16}{\pi^2K_1^2}}$ là một hằng số lớn hơn 0.

Diện tích bề mặt của hàng hoá trên một đơn vị trọng lượng hàng hoá sẽ là

$$\frac{S}{W} = K_2W^{\frac{1}{3}} = \frac{K_2}{\sqrt[3]{W}}$$

Đương nhiên số diện tích bề mặt theo đơn vị khối lượng hàng hoá sẽ giảm khi W tăng. Khi khối lượng của hàng hoá tăng thì diện tích bề mặt của một đơn vị khối lượng hàng hoá giảm, và số đơn vị bao bì cho một đơn vị hàng hoá sẽ giảm.

Do đó với hàng hoá đựng trong bao bì lớn thì giá thành của bao bì trên đơn vị khối lượng hàng hoá giảm, vì vậy đơn giá theo khối lượng đựng trong bao lớn sẽ thấp hơn hàng hoá đựng trong bao nhỏ. Bên cạnh đó giá thành cho việc đóng gói hàng thấp hơn khi đóng gói các bao hàng bé.

Vì vậy khi mua hàng nếu mua loại hàng có số lượng cần sử dụng lớn nên mua hàng đựng trong các túi lớn.

Từ khoá: *Thể tích, diện tích bề mặt.*

128. Vì sao nhiều cửa hiệu bán hàng có thưởng lại không bị thiệt nhiều lắm?

Chúng ta học toán nên thường xuyên liên hệ những kiến thức đã học với mọi hoạt động trong cuộc sống, dùng phương pháp toán học để giải thích nhiều hiện tượng trong cuộc sống xung quanh. Nếu có người cho rằng bán hàng có thưởng vừa mua được hàng lại vừa được tiền thưởng thì quả là quá tốt. Thế nhưng họ không biết rằng, trong thực tế, với kiểu bán hàng có thưởng, chủ cửa hàng không bị thiệt nhiều lắm.

Dưới đây là nội dung của một quảng cáo đăng trong báo “Tân dân buổi chiều” ở Thượng Hải năm 1993 về việc bán hàng có thưởng.

Thể lệ hình thức bán hàng có thưởng bắt đầu vào năm 1993:

1. Ngày bắt đầu và kết thúc hình thức bán hàng có thưởng:

1-4-1993. Số phiếu có thưởng 10.000 phiếu, phát hết thì dừng.

2. Doanh số bán buôn đạt 1000 nhân dân tệ (RMB) thì phát một phiếu thưởng và doanh số bán lẻ đạt 400 RMB thì phát một phiếu thưởng.

3. Ngày mở thưởng: trên báo "Tân dân buổi chiều" số ra vào trung tuần tháng 5.

4. Cơ cấu giải thưởng:

2 giải đặc biệt, mỗi giải trị giá 2000 RMB (tặng phẩm).

10 giải nhất, mỗi giải trị giá 800 RMB (tặng phẩm).

20 giải nhì, mỗi giải trị giá 200 RMB (tặng phẩm).

50 giải ba, mỗi giải trị giá 100 RMB (tặng phẩm).

200 giải tư, mỗi giải trị giá 50 RMB (tặng phẩm).

1000 giải năm, mỗi giải trị giá 20 RMB (tặng phẩm).

Tổng giá trị các giải thưởng là 51000 RMB, tỉ lệ trúng số là 12,82%.

Chúng ta có thể tính tỉ lệ tổng giá trị tiền thưởng với tổng doanh thu bán hàng như sau:

1. Nếu số phiếu phát giải thưởng là dựa vào doanh thu bán buôn thì tiền doanh thu bán buôn sẽ là: 1000 x 10000 = 10.000.000 (RMB)

Và tỉ lệ tổng tiền thưởng đối với tổng doanh thu bán buôn sẽ là:

$$^{51.000}/_{10.000.000} \times 100\% = 0,51\%$$

2. Nếu 10.000 phiếu thưởng phát ra là dựa vào doanh thu bán lẻ, thì số doanh thu bán lẻ tương ứng sẽ là:

$$400 \times 10.000 = 4.000.000 \text{ (RMB)}$$

Vì tỉ lệ giữa tiền thưởng và số doanh thu sẽ là:

$$^{51.000}/_{400.000} \times 100\% = 1,275\%$$

Như vậy khi hình thức bán hàng có thưởng hoạt động thì nhà hàng đã tặng cho khách giải thưởng trị giá từ 0,51 - 1,275%. So với hình thức bán khuyến mại và hoa hồng mà các công ty chấp nhận đến 2% thì ở đây tiền thưởng cho khách hàng dưới hình thức tiền thưởng còn ít hơn. Hình thức bán hàng có thưởng khác với hình thức bán hàng chiết khấu lợi tức là phần lợi ích chia đều cho các khách hàng, còn ở hình thức bán hàng có thưởng là nguồn lợi ở bộ phận nhỏ cấp tập trung cho một bộ phận rất nhỏ trong số khách hàng được thưởng.

129. Dùng toán học đánh giá hiệu quả quảng cáo như

thế nào?

Trong cuộc sống hàng ngày chúng ta rất quen thuộc với các hình thức quảng cáo: Quảng cáo trên báo chí, quảng cáo trên truyền hình, quảng cáo trên đài phát thanh, quảng cáo trên bảng v.v... Trong mỗi loại phát thanh, quảng cáo người ta cố tạo các điểm mới lạ về thiết kế, ý tưởng nhưng nói chung đều phải qua lời văn diễn đạt.

Thế một quảng cáo tốt phải đáp ứng các yêu cầu nào? Các nhà quảng cáo ở nước ngoài thường quy quảng cáo về các điểm sau đây:

Hấp dẫn (attention)

Kích thích hứng thú (interest)

Gợi sự ham thích (desire)

Thúc đẩy việc mua của khách (action)

Khi mua hàng xong cảm thấy vừa ý (satisfactory)

Các chữ cái đầu của tiếng Anh tạo nên công thức "AIDAS" là các yêu cầu cho một quảng cáo theo ngôn ngữ của giới quảng cáo nói chung. Tuy nhiên trong quảng cáo còn phải chú ý đến tính chân thực, tính đơn giản, tính sinh động. Chỉ như vậy các quảng cáo mới có hiệu quả.

Làm thế nào có thể ước lượng hiệu quả quảng cáo bằng toán học? Đó chính là "phương pháp tính lợi ích quảng cảo" để đo hiệu quả thực tế của quảng cáo.

Công thức tính như sau:

$$R = \frac{(S_2 - S_1)P_1}{P_2}$$

R: đánh giá hiệu quả của quảng cáo (biểu thị lợi ích gia tăng ứng với 1 đồng phí quảng cáo); S_2: số lượng sản phẩm tiêu thụ sau khi đăng quảng cáo; S_1: số lượng sản phẩm tiêu thụ trước khi cho đăng quảng cáo; P_1 đơn giá sản phẩm; P_2 phí quảng cáo.

Ví dụ một loại sản phẩm hàng tháng tiêu thụ 8000 kiện sau khi đăng quảng cáo, trước khi đăng quảng cáo hàng tháng tiêu thụ 6000 kiện. Hàng tháng chi phí quảng cáo hết 5000 đồng. Đơn giá sản phẩm là 1000 đồng. Theo công thức trên ta tính:

$$R = \frac{(8000 - 6000) \times 1000}{5000} = 400 \text{ đồng}$$

Hay nói cách khác mỗi đồng chi phí quảng cáo thu về được 400 đồng.

Công thức trên đây để tính cho trường hợp các hoạt động thương mại tiến hành bình thường. Trong tình hình có các biến động ngẫu nhiên về thị trường có thể có sự sai lệch nào đó trong kết quả tính toán.

Từ khoá: *Phương pháp toán học.*

130. Làm thế nào dùng toán học lại chọn được hàng hoá vừa ý?

Trong cuộc sống người ta hay gặp tình huống sau đây: Trong vô vàn các loại hàng hoá bày bán, làm thế nào chọn được món hàng vừa ý nhất? Đương nhiên là những người bán hàng sẽ đem các loại hàng hoá để các bạn có thể chọn. Chúng ta không có nhiều cơ hội để chọn vì hàng hoá đem bày khá nhiều loại, bạn sẽ không đủ thời giờ để làm việc chọn lựa. Lại như có trường hợp các nhà sản xuất chọn các sản phẩm tốt nhất của mình đem bày ra, làm thế nào chọn được cái tốt nhất trong những mặt hàng đã trình bày?

Có khá nhiều tiêu chuẩn để đánh giá một mặt hàng tốt. Đứng về phía khách hàng, có ba tiêu chuẩn để đánh giá một mặt hàng tốt: 1. chất lượng hàng hoá, 2. hình thức bên ngoài sản phẩm, 3. giá cả. Với ba tiêu chuẩn này không dễ nhân nhượng lẫn nhau. Tâm lí của khách hàng cũng có nhiều xu hướng: có người có yêu cầu cao về chất lượng, có người lại đánh giá cao về hình thức, có người lại chú ý nhiều về giá cả.



Chúng ta giả thiết khách hàng đã có một định hướng về tiêu chuẩn chọn hàng, có thể chọn hàng hoá tốt xấu từ hai vật phẩm đem so sánh với nhau.

Bây giờ giả thiết có *n* vật phẩm để bạn chọn lựa. Phương pháp chung là nhặt lấy hai sản phẩm rồi so sánh với nhau. Sau đó lại đổi hai sản phẩm khác và lại tiến hành so sánh. Việc lựa chọn cứ thế tiếp tục cho đến khi chọn được sản phẩm vừa ý nhất. Thế thì từ *n* sản phẩm ta cần tiến hành bao nhiêu lần chọn lựa để được sản phẩm tốt. Để tiện theo dõi ta gọi số lần tiến hành chọn là *f(n)*.

Giả sử khi $n = 2$ tức chọn sản phẩm tốt từ hai sản phẩm, rõ ràng chỉ cần 1 lần chọn là chọn được sản phẩm tốt, vì vậy ta có $f(2) = 1$

Khi $n = 3$, trước hết ta chọn hai trong ba sản phẩm đem so sánh, sau khi chọn được sản phẩm tốt từ hai sản phẩm, ta lại đem sản phẩm vừa được chọn so với sản phẩm còn lại, nhờ vậy ta chọn được sản phẩm tốt từ ba sản phẩm và chỉ qua hai lần chọn, nên ta có $f(3) = 2$.

Ta lại xem xét tiếp trường hợp n là số bất kì: Trước hết ta chọn hai sản phẩm đem so sánh rồi chọn 1, sau đó lại đem sản phẩm được chọn so sánh với 1 trong các sản phẩm còn lại cho đến khi chỉ còn 1 sản phẩm chọn được cuối cùng. Rõ ràng để đạt đến kết quả ta phải tiến hành $n - 1$ lần chọn. Phương án lựa chọn này rõ ràng không nhỏ hơn số f(n) nên $f(n) \leq n - 1$.

Khi đã có phương án ta chỉ cần tiến hành *f(n)* lần chọn. Để thực hiện ta bắt đầu thực hiện lần so sánh đầu tiên; chọn hai trong *n* sản phẩm để so sánh. Sau khi đã loại bỏ một sản phẩm tốt nhất từ n - 2 sản phẩm còn lại sẽ được tìm thấy khi thực hiện số lần thử f(n - 1) tức là thực hiện việc tuyển chọn sản phẩm tốt từ n-1 sản phẩm còn lại. Do $f(n) - 1 \geq f(n - 1)$ nên $f(n) \geq f(n - 1) + 1 \geq f(n$

$-2) + 1 + 1$

$\geq f(n - 3) + 3 \geq f(n - (n - 2)) + n - 2$

$= f(2) + n - 2 = 1 + n - 2 = n - 1$

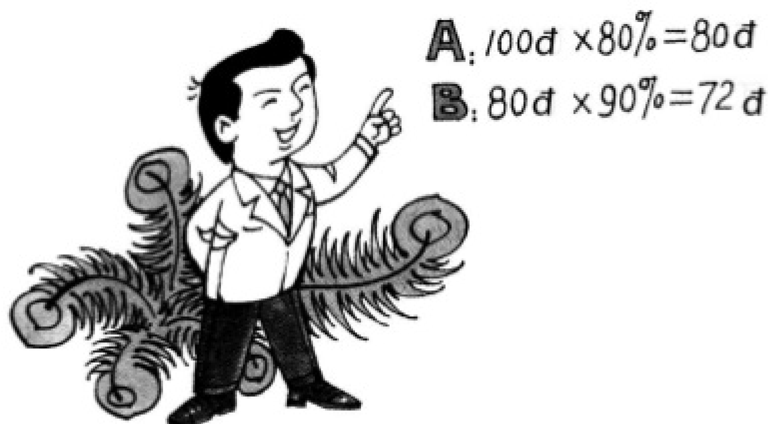
Từ kết quả trước đây ta có bất đẳng thức $f(n) \leq n - 1$ so với kết quả suy luận vừa rồi ta lại có ($f(n) \geq n-1$, do đó $f(n) = n - 1$. Từ đó có thể thấy để chọn được sản phẩm tốt từ n sản phẩm ta phải tiến hành $n - 1$ lần so sánh. Trên đây chúng ta đã đưa ra phương án chọn sản phẩm tốt từ *n* sản phẩm và thấy rằng phải tiến hành $n - 1$ lần so sánh. Đương nhiên có thể còn có các phương án khác. Ví dụ trước hết ta chia các sản phẩm thành từng nhóm sau đó lại đem các sản phẩm tốt được tuyển chọn từ các nhóm đem so sánh với nhau v.v..

Sau đây chúng ta lại xét cách chọn hai sản phẩm tốt nhất từ *n* sản phẩm. Chúng ta chỉ đặt yêu cầu là chọn được hai sản phẩm vừa ý từ *n* sản phẩm. Ta thử xét xem phải tiến hành bao nhiêu lần so sánh thì đạt được yêu cầu đặt ra. Trước hết, để chọn được một sản phẩm từ *n* sản phẩm ta phải thực hiện $n - 1$ lần so sánh. Sau đó loại bỏ sản phẩm tốt này ra, lại tiến hành chọn một sản phẩm tốt từ $n - 1$ sản phẩm còn lại. Muốn làm được việc đó phải thực hiện $n - 2$ lần so sánh. Nhờ đó chúng ta đã chọn được hai sản phẩm tốt từ *n* sản phẩm và bảo đảm đó là hai sản phẩm tốt từ n sản phẩm. Nếu không cần tìm sản phẩm đứng đầu trong *n* sản phẩm ta chỉ cần thực hiện $2n - 3$ lần so sánh, bớt đi lần so sánh chọn cái sản phẩm thứ hai, tức phải tiến hành $2n - 4$ lần so sánh.

Từ khoá: *Phương pháp toán học.*

Một nhà doanh nghiệp khi tiến hành đầu tư thường có thể phải rất mạo hiểm. Ví dụ, khi đầu tư vào hạng mục A nếu thành công có thể thu được một triệu đồng tiền lãi, nhưng khả năng đạt thành công lại hơi thấp, khoảng 80%. Nếu đầu tư vào hạng mục *B* thì khi thành công thu được 800.000 đồng tiền lãi nhưng tỉ suất thành công lại cao đến 90%. Bây giờ nên chọn phương án nào. Muốn chọn lựa đúng ta phải ứng dụng khái niệm kì vọng toán học.

Người ta gọi kì vọng toán học là tích của giá trị mục tiêu thành công với khả năng thu được thành công. Trong ví dụ nêu trên, kì vọng toán học của hạng mục *A* và hạng mục *B* của nhà doanh nghiệp sẽ là:



A: 1 triệu x 80% = 800.000

B: 800.000 x 90% = 720.000

Vì vậy nếu đầu tư cho hạng mục *A* sẽ có kì vọng cao hơn.

Trong cuộc sống hàng ngày ta vẫn hay gặp các vấn đề có liên quan đến kì vọng toán học.

Khi đi trên đường phố các bạn chắc hẳn gặp nhiều quảng cáo trên xe ô tô, bến xe điện... nào là vé xổ số loại *A*, vé xổ số loại *B* cùng những lời rao tương tự của người bán vé số. Vé loại *A* giải nhất 100 triệu, cơ hội trúng số lớn v.v... Bấy giờ bạn có thể có hứng muốn mua thử một vé... Thế cần chọn loại nào? Để chọn lựa tốt bạn có thể tính kì vọng toán học và sẽ có cách chọn một cách thông minh.

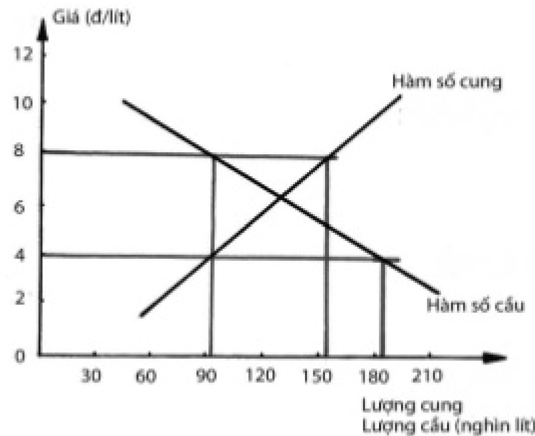
	Số tiền thưởng khi trúng số	**Khả năng trúng số**	**Kì vọng toán học:tiền thưởng(khả năng trúng)**
Vé số loại A	3.000.000đ	2.000.000 vé có 1 vé trúng thưởng tức khả năng trúng số 1/2000.000	3000.000 x 1/2000.000 = 1,5đ
Vé số loại B	1.000.000đ	500.000 vé có 1 vé trúng thưởng, khả năng trúng sô 1/500.000	1000.000 x 1/500.000 = 2đ

Từ các kết quả tính toán ghi trong bảng ta thấy ở loại vé số *B* có kì vọng lớn hơn *A*.

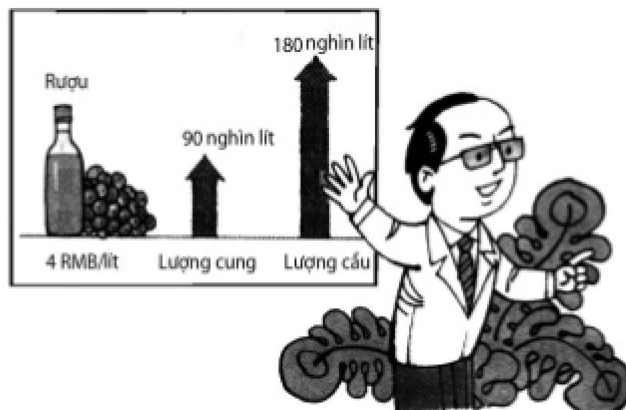
Khi mới được phát hiện, "kì vọng toán học" thực sự giúp người ta giải quyết nhiều vấn đề khó lựa chọn nên được người ta tán dương là "kì vọng toán học vĩ đại". Ngày nay kì vọng đã giúp người ta giải quyết nhiều vấn đề hóc hiểm đặc biệt trong việc lựa chọn phương án đầu tư trong kinh doanh.

Từ khoá: *Kì vọng toán học.*

Trong cuộc sống hằng ngày, chúng ta thường gặp phải rất nhiều vấn đề về kinh tế, ví dụ, làm sao có thể mua được đồ với giá cả hợp lý nhất, làm sao có thể tính toán được lãi suất tiết kiệm ngân hàng, làm sao có thể dự đoán tình hình lên xuống của thị trường chứng khoán, làm sao để tính toán được kế hoạch chi tiêu cá nhân... Tất cả vấn đề này đều liên quan tới toán học.



Lấy ví dụ một loại rượu nào đó trên thị trường. Khi nhu cầu rượu trên thị trường lớn hơn nhiều so với lượng cung cấp, giá rượu sẽ tăng cao. Và với tình hình ngược lại, giá rượu sẽ xuống thấp. Ta hoàn toàn có thể giải thích lượng cung cầu này bằng một hàm số toán học. Đơn giản nhất, coi lượng cung và lượng cầu là một giá trị hàm số của giá. Thông thường, giá thấp, người mua sẽ nhiều, lượng cầu cũng lớn; Giá đắt, nhà sản xuất sẽ thu được lợi nhuận lớn, lượng cung cũng lớn. Vì thế, có thể coi lượng cầu là hàm giảm của giá. Ngược lại, lượng cung lại là hàm tăng của giá (như hình vẽ). Khi giá rượu là 4 RMB/lít, lượng cung là 90.000 lít, lượng cầu 180.000 lít, lượng cầu lớn hơn cung rất nhiều, ít trở thành hiếm, giá rượu lúc này lập tức tăng cao. Để đáp ứng nhu cầu của thị trường, đồng thời cũng là thu lợi nhuận cho doanh nghiệp, các nhà sản xuất lại mở rộng sản xuất, nâng cao lượng cung, khiến cung và cầu dần trở nên cân đối. Khi giá rượu là 8 RMB/lít, lượng cầu là 90.000 lít, lượng cung lại lớn tới 150.000 lít, cung vượt xa cầu, rượu trên thị trường thừa thãi, các cửa hàng bán không được, giá rượu lại phải hạ xuống, các nhà sản xuất cũng cắt giảm lượng cung, đồng thời có nhiều động thái kích cầu, thu hút khách hàng mua rượu, để cân bằng cung cầu. Quá trình điều chỉnh thị trường này sẽ diễn ra liên tục cho đến khi cung và cầu bằng nhau. Dùng quan điểm hàm số để giải thích quy luật cung cầu có thể biểu diễn và phân tích được sự thay đổi về giá cả, đồng thời có thể dự đoán được xu thế biến động của thị trường.



Đương nhiên, đây chỉ là một ví dụ rất đơn giản, sử dụng kiến thức toán phổ thông mà thôi. Nhưng từ đó, ta cũng có thể thấy toán học có thể làm chính xác, rõ ràng quan hệ giữa các đại lượng kinh tế.

Cùng với sự phát triển của kinh tế học hiện đại, toán học thâm nhập mỗi lúc một sâu hơn vào lĩnh vực kinh tế. Ngôn ngữ chính xác, cụ thể của toán có thể khắc họa được các khái niệm kinh tế , đồng thời cũng là công cụ xây dựng những lí luận lôgic, để giải thích, phân tích, dự báo các vấn đề kinh tế. Từ khi có Giải thưởng Nobel về Kinh tế, công việc của hơn một nửa số người nhận giải thưởng đều liên quan mật thiết tới toán học. Chả trách nhiều người cho rằng, một nhà kinh tế tài ba nhất định cũng phải là một chuyên gia toán học ưu tú.

Từ khóa: *Toán học: Kinh tế học.*

Không biết bạn có chú ý là trên bao bì, hộp đựng nhiều thương phẩm như thuốc lá, rượu thường có bố trí một nhóm vạch xếp thành hình chữ nhật. Nhóm vạch gồm nhiều vạch đen trắng, to nhỏ khác nhau. Thực ra, trong đời sống hàng ngày mã vạch được sử dụng khá rộng rãi: Trong các hàng hoá, sách báo xuất bản, ở trang bìa cuối thường có mã vạch.



Thế mã vạch có công dụng gì? Vì sao trên hàng hoá, bìa sách, tạp chí lại có mã vạch. Trên thực tế, mã vạch là người bạn đường của máy tính, tuỳ thuộc sự phát triển của kĩ thuật máy tính và tuỳ thuộc tình trạng giao lưu kinh tế mà sinh ra một kĩ thuật thông tin mới đó là kĩ thuật mã vạch. Mã vạch hội đủ các yếu tố: rất tiết kiệm, nhanh chóng, chính xác khi thu thập và truyền đạt các thông tin. Nói vắn tắt, chỗ đặc dụng của mã vạch là truyền đạt các thông tin.

Khả năng truyền đạt thông tin của nhóm vạch có độ rộng to nhỏ khác nhau là điều không còn phải bàn cãi. Dưới đây sẽ giới thiệu một cách vắn tắt. Mã vạch có thể truyền đạt thông tin qua độ rộng, hẹp, đậm, nhạt của các vạch, các đặc điểm này của mã vạch có thể nhận biết nhờ các vạch, độ rộng của khe, cách bố trí các vạch mà mã vạch có thể truyền đạt các loại thông tin khác nhau. Quan sát kĩ các mã vạch khác nhau, bạn có thể thấy tuy trông bề ngoài chúng hầu như giống nhau, tuy nhiên thực sự chúng có các khác biệt nhỏ. Các sai biệt này ta không nhận thấy được bằng mắt, nhưng với máy tính thì các sai biệt này là rất lớn.

Mới nhìn thì mã vạch là các vạch có độ rộng to nhỏ khác nhau, thực ra nó là một loạt các chữ số theo hệ đếm nhị phân. Mọi người đều biết trong hệ đếm nhị phân chỉ có hai chữ số: 1 và 0 mà trong hệ mã vạch số 1 và số 0 được phân biệt theo hình dáng của vạch liền và khe trống, hoặc vạch rỗng là số 1 còn vạch mảnh là số không v.v... Hoặc cũng có thể dùng màu đen, màu trắng, vạch màu đen là số 1, vạch trắng là số 0 v.v... Máy tính sẽ dùng đầu đọc quang học như các bút quang điện để đọc mã vạch. Khi chiếu ánh sáng lên mã vạch, giữa vạch đen và vạch trắng có sự phân biệt rất rõ, các nét phân biệt này sẽ được biểu hiện bằng các dòng quang điện lớn, nhỏ; còn giữa nét vạch và khe hở làm tín hiệu xuất hiện trong các thời gian dài, ngắn khác nhau. Như vậy bút quang điện có thể nhận biết được mã vạch. Thông thường có thể đọc mã vạch theo kiểu quét song song với vạch, có thể quét ngang từ trái sang phải hoặc ngược lại.

Mã vạch có thể đọc được bằng máy, nhưng có phải người ta không thể nào nhận được bằng mắt? Thực ra nhìn vào cách sắp xếp các nhóm vạch người ta có thể hiểu sơ lược được phạm vi của các mã vạch.

Thông thường thì mã vạch truyền đạt thông tin qua máy tính, qua một quy phạm phiên dịch thống nhất. Ví dụ trong sản xuất ô tô người ta dùng hệ mã "cốt 39", đó là loại kĩ thuật mà lĩnh vực sản xuất ô tô quy định sử dụng một cách phổ biến. Trên thế giới không ít các nghiệp đoàn, đoàn thể quy định hệ mã vạch theo một quy phạm riêng. Tuy nhiên cũng có hệ mã vạch chỉ lưu hành trong phạm vi nội bộ không cần có sự phổ biến với bên ngoài như các hệ mã vạch riêng cho nội bộ một siêu thị không cần phải phù hợp với các quy phạm thông dụng.

Sự phát triển của kĩ thuật máy tính đã trực tiếp đưa đến các ngôn ngữ máy làm việc ứng dụng mã vạch ngày càng rộng rãi.

Từ khoá: *Mã vạch và thông tin.*

Ở các nhà máy ngoài các bộ phận quản lí, sản xuất, tiêu thụ sản phẩm còn có bộ phận chuyên việc bảo dưỡng sửa chữa máy móc thiết bị, để có thể kịp thời phát hiện sự cố gây hậu quả đáng tiếc. Việc bố trí công nhân vào việc sửa chữa bảo dưỡng đương nhiên phải kèm tiền lương tương ứng vì vậy nếu bố trí dư thừa thì sẽ gây lãng phí. Nhưng nếu bố trí quá ít thì khi máy móc có sự cố kĩ thuật sẽ không sửa chữa được kịp thời cũng sẽ ảnh hưởng đến sản xuất. Vậy cần phải bố trí bao nhiêu công nhân sửa chữa bảo dưỡng thì hợp lí? Đây là vấn đề phải tuỳ tình hình của nhà máy mà chọn phương án thích hợp.

Giả sử nhà máy có 100 cỗ máy tham gia sản xuất. Mỗi ngày có thể xảy ra sự cố kĩ thuật theo các khả năng (xác suất) nêu trong bảng dưới đây:

Số máy xảy ra sự cố kĩ thuật	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Khả năng(%)	70	15	8	4	2	1

Giả sử với mỗi cỗ máy xảy ra sự cố kĩ thuật cần một công nhân sửa chữa trong một ngày. Nếu máy không kịp sửa chữa trong ngày sẽ gây tổn thất 1000 đ, tiền lương cho công nhân sửa chữa là 35 đ/ngày.

Hiển nhiên, sự cố kĩ thuật xảy ra hằng ngày (có thể dự đoán) ít nhất cần một công nhân, nhiều nhất cần năm công nhân sửa chữa. Dưới đây ta sẽ xét xem việc bố trí từ 1- 5 công nhân sửa chữa và số tiền bình quân mà nhà máy phải bỏ ra (kể cả tổn thất do dự cố kĩ thuật) bao nhiêu tiền.

Nếu bố trí một công nhân sửa chữa, mỗi ngày nhà máy phải bỏ ra 35 đ tiền lương. Khi có sự cố kĩ thuật, số máy có sự cố kĩ thuật không kịp thời sửa chữa có thể là:

Số máy không kịp sửa chữa	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Khả năng (%)	85	8	4	2	1

Tổn thất bình quân do sự kiện đó sẽ là:

1000 (1 x 8% + 2 x 4% + 3 x 2% + 4 x 1%) = 260đ

Và mỗi ngày nhà máy phải bỏ ra số tiền (kể cả tổn thất) là A_1

$$A_1 = 35 + 260 = 295đ.$$

Tương tự ta có thể tính số tiền nhà máy bỏ ra mỗi ngày khi bố trí từ 2, 3, 4, 5 thợ sửa chữa:

Bố trí hai công nhân sửa chữa:

$$A_2 = 35 \text{ x } 2 + 1000 \text{ x } (1 \text{ x } 4\% + 2 \text{ x } 2\% + 3 \text{ x } 1\%) = 180đ.$$

Bố trí ba công nhân sửa chữa

$$A_3 = 35 \text{ x } 3 + 1000 \text{ x } (1 \text{ x } 2\% + 2 \text{ x } 1\%) = 145đ$$

Bố trí bốn công nhân sửa chữa

$$A_4 = 35 \text{ x } 4 + 1000 \text{ x } (1 \text{ x } 1\%) = 150đ$$

Bố trí năm công nhân sửa chữa

$$A_5 = 35 \text{ x } 5 = 175đ$$

Từ các tính toán ở trên ta thấy nếu nhà máy bố trí ba công nhân sửa chữa hàng ngày thì số tiền phải bỏ ra (kể cả tổn thất do sự cố) là ít nhất.

Trên đây chúng ta đã nghiên cứu vấn đề bố trí số công nhân bảo dưỡng, sửa chữa cho một nhà máy, bây giờ chúng ta nghiên cứu cách sắp xếp để cho các công nhân bảo dưỡng, sửa chữa làm việc hợp lí nhất, để các công nhân sửa chữa làm việc với hiệu suất cao nhất.

Giả sử nhà máy có hai phân xưởng *A* và *B*, mỗi phân xưởng có 100 cỗ máy làm việc. Các sự cố kĩ thuật và tổn thất có thể xảy ra ở mỗi phân xưởng cũng giống như ở ví dụ trước. Dựa vào kết quả tính toán ở mục trước, mỗi phân xưởng cần bố trí ba công nhân chuyên bảo dưỡng, sửa chữa máy móc để nhà máy ít tổn thất khi xảy ra sự cố kĩ thuật. Bây giờ tổn thất trung bình của hai phân xưởng sẽ là:

$$1000 \text{ x } (1 \text{ x } 2\% + 2 \text{ x } 1\%) \text{ x } 2 = 80đ.$$

Một cách sắp xếp khác để sáu công nhân cùng phục vụ chung cho cả 200 cỗ máy trong việc sửa chữa, bảo dưỡng. Trước hết chúng ta thử tính toán các sự cố kĩ thuật có thể xảy ra cho cả 200 cỗ máy cũng như những tổn thất do các sự cỗ kĩ thuật đó gây ra. Khả năng không xảy ra sự cố ở cả hai phân xưởng sẽ là:

$$70\% \text{ x } 70\% = 47\%.$$

Nghĩa là có khả năng có một sự cố xảy ra ở một trong hai phân xưởng A hoặc B, cũng có khả năng cả hai phân xưởng có một sự cố kĩ thuật và vì vậy có khả năng là:

$$70\% \text{ x } 15\% + 15\% \text{ x } 70\% = 21\%.$$

Nghĩa là có khả năng 21% sự cố xảy ra trong hai sự cố kĩ thuật ở hai cỗ máy hoặc tại phân xưởng A hoặc tại phân xưởng B hoặc ở mỗi phân xưởng có xảy ra một sự cố kĩ thuật và tổng các sự cố kĩ thuật sẽ là:

8% x 70% + 70% x 80% + 15% x 15% = 13,45%.

Bằng cách tính tương tự chúng ta có thể tìm thấy khả năng của các tình huống khác. Các kết quả tính được dẫn ra ở bảng sau:

Số sự cố kĩ thuật	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Khả năng(%)	49	21	13,45	8	4,14	2,64	0,78	0,32	0,12	0,04	0,01

Nếu cả sáu công nhân cùng làm việc chung thì tổn thất bình quân sẽ là:

1000 x (1 x 0,32% + 2 x 0,12% + 3 x 0,04% + 4 x 0,01%) = 7,2đ

Hiển nhiên trong phương án sắp xếp như phương án hai tổn thất của nhà máy là thấp nhất.

Dùng phương án đã trình bày ở mục trước ta có thể sử dụng phương án hai khi bố trí từ 5 công nhân sửa chữa, nhà máy sẽ chịu tổn thất trung bình và tiền lương công nhân là ít nhất:

A_5 = 35 x 5 + 1000 x (1 x 0,78% + 2 x 0,32%+...+ 5 x 0,01%) = 194,9đ

Bấy giờ tổn thất trung bình sẽ là

1000 x (1 x 0,78% + 2 x 0,32% +...+ 5 x 0,01%) = 19,9đ.

Từ kết quả tính toán trên đây cho thấy khi dùng phương án hai không chỉ tiết kiệm được tiền lương chi trả cho công nhân mà còn có thể giảm bớt các tổn thất do sự cố kĩ thuật đưa lại (từ 80 đ còn 19,9 đ) nên nâng cao được hiệu suất công tác.

Một xí nghiệp nọ đóng gói đường glucoza bằng một cỗ máy. Tiêu chuẩn để máy đóng gói là mỗi gói đường nặng 500 g. Khi máy đóng gói làm việc bình thường, mỗi túi bình quân là 500 g nhưng có thể do nhiều nguyên nhân mà có thể có sai số ± 5 g. Để bảo đảm chất lượng sản phẩm, hàng ngày trước khi làm việc, công nhân phải tiến hành kiểm tra máy móc. Thế nhưng việc kiểm tra hàng ngày nên tiến hành như thế nào?

Giả sử trong một ngày nào đó, máy đóng gói làm việc không được bình thường, trước khi làm việc, công nhân thử đóng 10 gói đường và tìm thấy các bao đường có các trọng lượng sau:

496, 506, 508, 498, 492, 495, 511, 503, 500, 491

Như vậy máy làm việc có bình thường không?

Phương pháp kiểm tra là tính xem 10 gói đường có trọng lượng trung bình có nằm trong giới hạn sai số cho phép không. 10 gói đường trên có khối lượng trung bình chính bằng 500 g như quy định, và sai số trọng lượng mỗi gói so với số trung bình sẽ là (đơn vị gam) -4, 6, 8, - 2, -8, -5, 11, 3, 0, -9

Sai số trung bình sẽ là:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{10}\left[(-4)^2 + 6^2 + 8^2 + ... + 0^2 + (-9)^2\right]} = 6,48g$$

Sai số này vượt quá tiêu chuẩn sai số cho phép, nhưng cũng không loại trừ các loại nhân tố ngẫu nhiên khi tiến hành kiểm tra, nên chúng ta chỉ có thể nói máy có thể có sự cố.

Nói chung khi tiến hành kiểm tra, nhà máy cần loại bỏ các nhân tố không xác định được, để tránh vấp phải các tổn thất không nhất thiết phải có. Bởi vì nếu máy không có sự cố kĩ thuật mà khi tiến hành kiểm tra lại ngộ nhận là có sự cố và đem sửa chữa thì sẽ lỡ kế hoạch sản xuất. Trong kiểm tra có thể xuất hiện hai loại sai lầm: là bỏ qua sai sót hoặc nhận nhầm là sai sót tức là bỏ qua thực chất của sự việc, chấp nhận sự vật giả.

Trong khi kiểm tra, việc tránh hoàn toàn hai loại sai lầm nêu trên là không thể được mà chỉ tìm cách giảm khả năng các sai lầm đó đến mức thấp nhất và cố gắng hạn chế trong tỉ lệ nhỏ nhất (phần trăm). Muốn thực hiện được việc đó, khi đặt tiêu chuẩn sai số nên đặt cận trên và cận dưới của sai số. Khi tiến hành kiểm tra nếu sai số vượt cận trên thì chắc chắn máy có sự cố và cần cho ngừng làm việc để sửa chữa. Nếu sai số nhỏ hơn giới hạn dưới thì chắc chắn máy không có sự cố kĩ thuật và có thể cho tiếp tục làm việc. Còn nếu sai số nằm trung gian giữa cận dưới và cận trên thì cần phải lặp lại kiểm tra một lần nữa để khẳng định.

Trong khi kiểm tra việc quy định giới hạn trên và dưới liên quan đến việc khống chế kết luận sai lầm. Ví dụ khi quy định 20% tức khống chế sai lầm mắc phải trong kết luận nhỏ hơn 10%. Ví dụ khi chọn giới hạn trên và giới hạn dưới là 6,06 g và 3,23 g thì vì 6,48 > 6,06 nên ta kết luận là máy có sự cố và cần phải cho ngừng làm việc để sửa chữa.

Chú thích: ở đây đề cập đến một vấn đề có liên quan đến một bài toán quan trọng của toán thống kê: Bài toán kiểm định giả thiết. Sai lầm nói trên chính là sai lầm loại một và sai lầm loại hai trong bài toán thống kê tương ứng. Để giảm sai lầm loại một cần tăng độ tin cậy của phép thử, ở đây là mức độ sai lầm nhỏ hơn 20%. Vì bài toán khá phức tạp nên chúng tôi không có điều kiện trình bày cho rõ hơn (N.D).

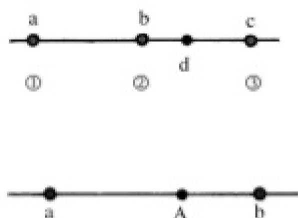
Trên một tuyến đường có ba cỗ máy cái đang làm việc. Ta cần bố trí một trạm cung ứng phụ tùng máy A trên tuyến đường. Vấn đề đặt ra là đặt trạm cung ứng ở đâu thì tổng đoạn đường mà từ vị trí các cỗ máy cái đến A là nhỏ nhất?

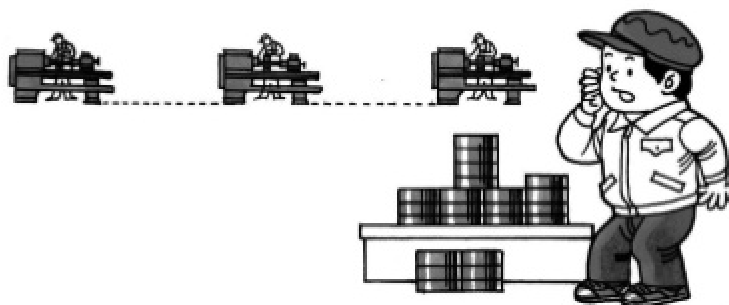
Ta có thể phán đoán ngay là *A* nên đặt tại vị trí ở cỗ máy số là hợp lí nhất. Tại sao vậy? Bởi vì nếu đặt *A* tại vị trí thì tổng cự ly để và đến vị trí bằng đoạn đường từ đến và bằng đoạn đường *a* + *c*. Nếu bố trí *A* tại điểm khác, ví dụ đặt tại d chẳng hạn thì từ và đến *d* là bằng *a* + *c*. Nhưng tổng đoạn đường dài từ , , đến d ngoài tổng *a* + *c* lại phải thêm đoạn đường từ 2 đến d; rõ ràng là tổng đoạn đường từ , , đến d sẽ lớn hơn *a* +*c*.

Thế nếu trên tuyến đường chỉ có hai cỗ máy thì nên bố trí A ở đâu? Rõ ràng trong trường hợp này đặt A tại vị trí nào giữa và đều được vì bây giờ tổng đoạn đường đi đến A bằng đoạn đường *a* + *b*

Bây giờ ta mở rộng bài toán thêm một chút.

Nếu trên tuyến đường có năm cỗ máy thì nên đặt *A* tại đâu? Có sáu cỗ máy thì nên đặt ở đâu và tổng quát hơn có n cỗ máy thì nên đặt *A* ở đâu?





Nếu n = 5 thì A nên đặt tại vị trí cỗ máy số .

Nếu n = 6 thì A nên đặt ở giữa ở giữa cỗ máy số và số . Nếu n là số lẻ thì A nên đặt ở cỗ máy thứ $^{n+1}/_2$. Nếu n là số chẵn thì A nên đặt ở vị trí cỗ máy số $^{n}/_2$ và $^{n}/_2$+1.

Trong thực tế nhiều khi người ta cần dùng đồ thị để biểu diễn diễn biến sự việc theo một số số liệu bằng cách nào đó. Đó là phương pháp dùng đồ thị để biểu đạt một số mặt thực nào đó của sự việc.

Vì vậy với cùng một nhóm số liệu, tuỳ thuộc yêu cầu thực tiễn mà người ta có thể biểu đạt một mặt thực nào đó của sự việc; nói cách khác từ cùng một nhóm số liệu tuỳ theo yêu cầu, ta có thể vẽ các đồ thị khác nhau. Ta thử xét một ví dụ sau đây:

Một nhà máy nọ do 5 chủ đầu tư và nhà máy có 100 công nhân. Thu thập của các nhà đầu tư và công nhân được trình bày trong bảng sau đây:

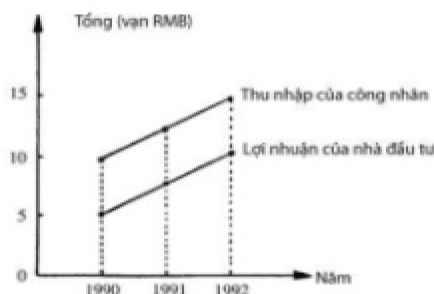
Năm	Tổng tiền lương trả cho công nhân	Tổng thu nhập của nhà đầu tư
1990	100.000 RMB	50.000 RMB
1991	125.000 RMB	75.000 RMB
1992	150.000 RMB	100.000 RMB

Các ông chủ dùng bảng số liệu này để vẽ các đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc về việc tăng thu nhập của chủ đầu tư và tiền lương công nhân trong ba năm. Theo đồ thị này thì hình như lợi nhuận của chủ đầu tư tăng song song với tiền lương của công nhân, là trong cảnh "có phước cùng hưởng có nạn cùng chịu" và công nhân cần chấp nhận thoải mái tình trạng hiện có. Vì vậy rõ ràng đồ thị loại trên là hợp ý với các ông chủ (hình 1).

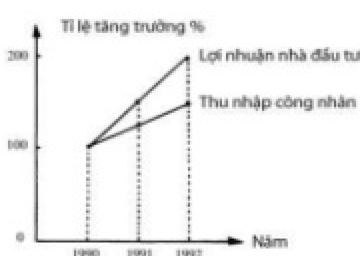
Tổ chức công đoàn cũng dựa vào bảng số liệu này vẽ nên đồ thị biểu diễn sự tăng trưởng của lợi nhuận các nhà đầu tư và tình hình tăng tiền lương của công nhân trong các năm đó.

Như trên hình 2 (lấy năm 1990 là 100%). Theo đồ thị này tốc độ tăng trưởng lợi nhuận của nhà đầu tư lớn hơn tốc độ tăng tiền lương của công nhân. Công đoàn đã nhằm lợi ích của công nhân để vẽ nên đồ thị này cho dù cùng xuất phát từ một nhóm số liệu. Hình 2 là hình biểu đạt lợi ích của công nhân so với nhà đầu tư.

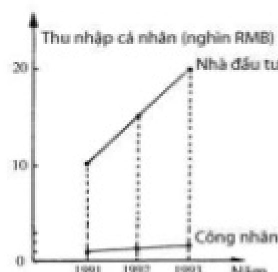
Một công nhân nào đó cũng dựa vào bảng số liệu này vẽ đồ thị so sánh mức tăng trưởng thu nhập của nhà đầu tư và của công nhân trong các năm tương ứng như trên hình 3.



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Hình 3 chứng tỏ lợi nhuận của từng ông chủ tăng lớn hơn nhiều so với mức thu nhập cá nhân của từng công nhân hàng năm. Mức tăng thu nhập hằng năm của hai bên cách biệt hàng chục lần. Vì vậy công nhân phải vì lợi ích bản thân mình đấu tranh với chủ để đòi tăng lương. Đồ thị này phù hợp với công nhân và vì mục đích phục vụ lợi ích của giới làm công.

Ba đồ thị đều vẽ đúng, chỉ có phục vụ các mục đích khác nhau, và đều có lí. Đúng như người ta nói "Ông nói ông phải, bà nói bà hay". Thế mới biết số liệu tuy như nhau nhưng việc vận dụng như thế nào là tuỳ yêu cầu thực tế.

Chúng ta đều biết tiền gửi ngân hàng sau một thời gian sẽ sinh lãi. Nhưng cách tính tiền lãi thực hiện như thế nào?

Có hai phương pháp tính lãi: Tính theo chế độ đơn giản và tính theo chế độ phức tạp.

Đặc điểm của phương pháp tính theo chế độ đơn giản là lấy tiền vốn gửi làm cơ sở để tính lãi, còn số tiền lãi thu nhập được do tiền vốn gửi không được nhập vào để tính lãi qua từng kì tính lãi. Ví dụ các bạn đem 2000 đồng gửi vào ngân hàng, thời hạn gửi ba năm, lãi suất 5% một năm. Việc tính lãi được thực hiện theo từng kì mỗi năm một lần. Sau một năm bạn được 2100 đồng, nhưng 100 đồng tiền lãi này sẽ không được nhập vào tiền vốn gửi để tính lãi cho năm thứ hai, thứ ba, và vì vậy tiền vốn để tính lãi cho năm thứ hai vẫn là 2000 đồng. Mỗi năm bạn sẽ được 100 đồng tiền lãi và cả ba năm sẽ nhận được 300 đồng tiền lãi.

Theo chế độ tính lãi đơn giản, nếu mỗi chu kì tính lãi với lãi suất p%, vì với số vốn gửi là a sau n chu kì tính toán ta sẽ có số tiền tổng cộng A là:

$$A = a(1 + np\%).$$

Đặc điểm của chế độ tính lãi phức tạp là tiền lãi thu được sau một chu kì tính lãi được nhập vào vốn và làm cơ sở để tính lãi cho chu kì tính lãi lần sau. Như vậy với cách tính lãi này như người ta thường nói "lãi mẹ đẻ lãi con". Vì với cũng với vốn gửi 2000 đồng ghi ban đầu, cũng với lãi suất 5%. Theo chế độ tính lãi phức tạp thì sau năm đầu phần lãi cũng vẫn là 100 đồng, nhưng ở lần tính lãi thứ hai, vốn để tính lãi lại là 2100 đồng và tiền lãi ở lần tính lãi thứ hai sẽ là 2100 đồng x 5% = 105 đồng. Trong lần tính lãi thứ ba vốn để tính lãi lại là 2205đ và tiền lãi ở kì tính lãi thứ ba sẽ là 2205 x 5% = 110,25 đồng. Tổng tiền lãi cả ba năm sẽ là 315,25 đồng. Như vậy với cùng một lãi suất, với cùng vốn gửi ban đầu như nhau, tiền lãi tính theo chế độ phức tạp sẽ được nhiều hơn.

Với số vốn gửi ban đầu là a, lãi suất ở mỗi chu kì tính lãi vẫn là p% và sau n lần tính lãi thì số tiền thu được sẽ là A:

$$A = a(1 + p\%)^n$$

Ở nhiều ngân hàng người ta kết hợp chế độ tính lãi đơn giản với chế độ tính lãi phức tạp. Nói cụ thể, trong một thời gian ước định người ta tính lãi theo chế độ đơn giản. Nhưng nếu sau thời gian ước định (sau một số chu kì tính lãi) người gửi vẫn không nhận lại tiền, ngân hàng lại chuyển số dư sang chu kì tính lãi sau với số gốc tính cả vốn lẫn lãi của kì gửi trước (tính theo chế độ đơn giản) làm cơ sở tính lãi cho các chu kì tính lãi sau.

Ví dụ cũng với vốn gửi 2000 đồng ban đầu cũng với lãi suất 5%. Chu kì ước định ba năm. Nhưng sau sáu năm người gửi mới nhận tiền gửi. Giả sử trong suốt thời gian này lãi suất không thay đổi. Số dư tiền gửi cả gốc lẫn lãi sẽ là:

$$2000 \text{ x } (1 + 3 \text{ x } 5\%)^2 = 2645 \text{ đồng}$$

Như vậy có phải việc dùng chế độ tính lãi sau một thời kì nhất định tính theo chế độ đơn giản ngắn hạn rồi chuyển sang chế độ tính lãi phức tạp thì có lợi hơn chế độ tính lãi phức tạp? Thực tế thì khi ngân hàng quy định lãi suất cho chế độ gửi tiền dài hạn, ngắn hạn đã có cân nhắc vấn đề đó. Lãi suất gửi tiền dài hạn bao giờ cũng cao hơn chế độ gửi ngắn hạn. Ví dụ người ta có thể quy định lãi suất cho các kì hạn gửi một năm, hai năm, năm năm tương ứng là:

2,16%; 2,25%, 2,43%; 2,7% và 2,88%.

Như vậy gửi tiền theo chế độ ngắn hạn có thể được lợi nhiều khi tính lãi theo chế độ phức tạp; nhưng vì khi gửi ngắn hạn thì lãi suất thấp nên chưa chắc đã thu được lợi nhiều hơn. Vì vậy khi xét việc chọn gửi tiền theo chế độ dài hạn hay ngắn hạn chủ yếu dựa vào kế hoạch sử dụng tiền mà lựa chọn. Đương nhiên về phía ngân hàng, họ phải dựa theo thời hạn gửi tiền mà định lãi suất, cũng không thể với cùng một số vốn gửi, theo chế độ gửi khác nhau và cách tính lãi khác mà nhận được cùng một số tiền lãi. Thực tế thì khi dùng chế độ gửi tiền khác nhau thì với cách tính lãi theo chế độ khác nhau lợi tức nhận được có thể khác nhau. Ví dụ khi đem 1000 đồng gửi vào ngân hàng có thể có bốn phương thức gửi khác nhau: 1. Tính tiền lãi từng năm một trong thời hạn quy định hai năm; 2. Tính lãi hai năm một lần; 3. Tính theo chế độ mỗi năm một lần và hai kì một năm; 4. Tính tiền dư bốn lần trong hai năm. Tiền lãi tính theo bốn chế độ như sau:

$$A_1 = 1000 \text{ x } (1 + 2 \text{ x } 2,43\%) = 1048,60 \text{ đ.}$$

$$A_2 = 1000 \text{ x } (1 + 2,25\%)^2 = 1045,51 \text{ đ}$$

$$A_3 = 1000 \text{ x } (1 + 2,25\%) \text{ x } (1 + 0,5 \text{ x } 2,16\%)^2 = 1044,71 \text{ đ}$$

$$A_4 = 1000 \text{ x } (1 + 0,5 \text{ x } 2,16\%)^4 = 1043,90 \text{ đ}$$

Từ đó có thể thấy theo phương thức một, là có lợi nhất. Vì vậy nếu bạn có số tiền dư nhiều có thể gửi dài hạn ở ngân hàng, bạn có thể chọn các phương án gửi tiền để thu được lãi suất nhiều nhất. Tuy nhiên việc chọn phương án để thu được nhiều lợi ích nhất, nên theo phương án nào không thể chỉ dựa vào toán học và quyết định mà phải kết hợp nhiều yếu tố.

Từ khoá: *Tiền lãi; Chế độ tính lãi đơn giản; Chế độ tính lãi phức tạp.*

Ở nhiều nước có hình thức gửi tiết kiệm lấy gọn. Theo hình thức gửi tiền này, người gửi sẽ hàng tháng đến ngân hàng gửi một số tiền theo định mức. Sau một thời gian quy định chọn trước người gửi tiền sẽ đến ngân hàng nhận một lần cả gốc lẫn lãi. Đó chính là cách gửi tiền theo hình thức gửi tiết kiệm. Mỗi tháng người gửi đem đến ngân hàng một số tiền không lớn lắm theo quy định đó là số tiền gửi góp. Sau một thời gian theo thời hạn quy ước, người gửi sẽ đến ngân hàng nhận cả gốc lẫn lãi.

Ví dụ người ta có thể quy định gửi tiền là một năm, ba năm và năm năm với lãi suất tương ứng hàng năm là 1,98%, 2,16% và 2,25%. Đồng thời ngân hàng công bố cho khách hàng số tiền lãi tương ứng với 100 đồng vốn cho thời hạn một năm, ba năm, năm năm là sẽ có tiền lãi tương ứng khi đến kì hạn là 12,87 đồng, 119,88 đồng và 343,93 đồng. Vậy cách tính lãi số tiền gửi góp này được thực hiện như thế nào?

Ta sẽ lấy ví dụ với 100 đồng vốn để thuyết minh cách tính lãi cho thể thức gửi góp lấy gọn này. Bởi vì việc gửi tiền theo định kì, mỗi tháng một lần, mỗi lần 100 đồng, trong một năm (12 tháng) số tiền gửi tất cả sẽ là 1200 đồng. Nhưng tiền gửi vào theo từng tháng một mà không phải ngay tháng đầu đã gửi hết, cũng không phải đợi đến kì cuối mới gửi một lần nên không thể tính lãi theo cách thông thường. Ví dụ số tiền 100 đồng gửi từ tháng đầu sẽ tính lãi cả 12 tháng, 100 đồng gửi tháng thứ hai sẽ tính lãi cho 11 tháng, tiền gửi tháng thứ ba sẽ tính lãi cho 10 tháng v.v...và tổng cộng số tháng đã gửi tiền là:

12 + 11 + 10 + ...+ 2 + 1 = (12 + 1) x 12 : 2 = 78 tháng = 6,5 năm.

Xem cách tính vừa trình bày quả là đơn giản, thuận tiện, nhưng tại sao lại có thể tính như vậy (bạn đọc dễ dàng tìm thấy lời giải đáp) và tổng số tiền lãi phải trả sẽ là:

100 x 1,98% x 6,5 = 12,87 đồng đó chính là con số tiền lãi mà ngân hàng công bố.

Tương tự khi tính lãi cho tiền gửi kì hạn ba năm sẽ được tính cho vốn gửi 100 đồng là:

36 + 35 + 34 +...+ 2 + 1 - (36 + 1) x 36 : 2 = 666 tháng bằng 55,5 năm. Và tổng số tiền lãi tính cho 100 đồng sẽ là:

100 x 2,16% x 55 x 5 = 119,88 đồng

Còn với thời hạn gửi năm năm sẽ là:

60 + 59 + 58 +...+ 2 + 1 = (60 + 1) x 60 : 2 = 1830 tháng = 152,5 năm.

Tổng số tiền lãi được nhận sẽ là:

100 x 2,25% x 152,5 = 343,13 đồng.

Kết quả tính toán giống như con số công bố của ngân hàng.

Từ khoá: *Tiền lãi; Lãi suất; Gửi góp lấy gọn.*

141. Cách so sánh để lựa chọn hình thức gửi tiền tiết kiệm có thưởng có lợi nhất cho người gửi?

Để hấp dẫn người gửi tiết kiệm, ngân hàng đặt ra các hình thức gửi tiền tiết kiệm có thưởng. Làm thế nào để xác định được hình thức gửi tiết kiệm có thưởng có lợi nhất cho người gửi?

Dưới đây ta sẽ bàn đến phương pháp so sánh chọn hình thức có lợi nhất cho người gửi. Nhiều người cho rằng việc có trúng thưởng hay không là nhờ vận may của người gửi. Thế nhưng cũng có nhiều người lại cho rằng việc trúng thưởng có thể dùng phương pháp so sánh lựa chọn mà có khả năng trúng nhiều hơn. Đứng về góc độ đó, dưới đây nghiên cứu việc chọn thể thức gửi có lợi nhất cho người gửi.

Ví dụ có hai loại gửi tiết kiệm có thưởng. Giả sử mỗi người gửi 100 đồng và cứ 100.000 số gửi lại tiến hành một lần mở thưởng. Người ta chọn các chữ số cuối và chữ số giữa của các số sổ làm tiêu chuẩn để chọn người được thưởng. Kết quả mở thưởng như sau:

Giải đặc biệt: với các sổ có chữ số ở giữa hoặc ở cuối có nhóm số 83317. Trúng thưởng 30.000 đ.

Giải đặc biệt: lưu động 32901 ở bất kì vị trí nào, tiền thưởng 28.000 đ.

Giải nhất	số sổ 98101: 10.000 đ
Giải nhì	số sổ 86447, 46447, 26447, 06447,trúng thưởng 5000 đ
Giải ba	7144, 2144, mỗi giải 1000 đ
Giải tư	096, mỗi giải 100 đ
Giải năm	56, mỗi giải 20 đ
Giải sáu	1, 3, 5, 7, 9 mỗi giải 2 đ

Hình thức gửi tiết kiệm thứ hai theo thể lệ:

Số cố định	19722	80.000 đ
Giải lưu động	8584, mỗi giải	7500 đ
Giải nhất	50652, 00652, mỗi giải	10.000 đ
Giải nhì	6316, mỗi giải	1000 đ
Giải ba	305, mỗi giải	100 đ
Giải tư	63, mỗi giải	10 đ
Giải năm	1, 3, 5, 7, 9 mỗi giải	4 đ.

Giả sử các số trong 10 vạn số được đánh số từ 000001 đến 10.000; các số trung gian có các số phân bố giữa hai số này là 10 vạn số. Do từ các số 000000 đến 099999 có thể tuỳ ý chọn một trong các chữ số từ 0 - 9. Trong 10 chữ số 0 - 9 có thể có 10 loại khả năng, 10 vạn chữ số chỉ có số 0 có một loại, vì vậy các số từ 000000 đến 099999 có các tổ hợp 1 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 = 100.000 loại, có nghĩa là có 100.000 số có các chữ số khác nhau. Bởi vì từ 1 - 100.000 các chữ số có thể chọn là 100.000 + 1 tức 100.000 số - 1 (tức số 000000) = 100.000

Nắm chắc được phương pháp này ta có thể tính được số người trúng thưởng cho mỗi hình thức. Trước hết ta bàn đến hình thức gửi thứ nhất. Giải sáu là với những số có các chữ số cuối là 1, 3, 5, 7, 9, tức ở chữ số hàng đơn vị chỉ có năm loại khả năng trúng thưởng, còn các chữ số ở các vị trí khác không có ảnh hưởng gì nên có thể có 1 x 10 x 10 x 10 x 10 x 5 = 50.000 loại tình huống. Số

người có thể trúng giải sáu là 50.000 người. Cũng với cùng lí do số người trúng giải năm sẽ là 1 x 10 x 10 x 10 x 1 x 1 = 1000 người, số người trúng giải tư 100 người, số người có thể trúng giải ba 20 người, trúng giải nhì năm người, trúng giải nhất một người, trúng giải đặc biệt lưu động một người, trúng giải đặc biệt một người. Từ đó ta sẽ tính được tổng tiền thưởng là:

50.000 x 2 + 1000 x 20 + 100 x 100 + 20 x 1000 + 5 x 5000 + 1 x 100.000 +1 x 28.000 + 1 x 30.000 = 243.000 đ. Tổng cộng tiền gửi mà ngân hàng nhận được là 100.000 x 100 = 10.000.000 đ. Và tỉ lệ tiền thưởng so với tiền gửi là 243.000/10.000.000 = 2,43%.

Theo phương pháp tính toán vừa trình bày với cách gửi tiền có thưởng theo hình thức hai, tỉ lệ số tiền thưởng so với tiền gửi là 4,05%. Theo cách tính toán vừa trình bày ta thấy hình thức gửi hai có lợi cho người gửi hơn hình thức một và người gửi có khả năng được lợi nhiều hơn.

142. Quy định chế độ mua hàng trả chậm định kì như thế nào?

Ở một số nước, để tăng cường khả năng cạnh tranh tiêu thụ hàng hoá người ta đề ra hình thức bán hàng trả chậm. Trong những năm gần đây, trong tình hình cải cách kinh tế của thời kì mở cửa, ở Trung Quốc cũng đã xuất hiện hình thức bán hàng trả chậm theo định kì.

Bán hàng trả chậm thực chất là hình thức mua chịu hàng hoá.

Giả sử có một kiện hàng giá 1000 đồng. Nếu dùng hình thức mua trả chậm, khách hàng nhận hàng trước, hẹn sau một thời gian, ví dụ như một năm chẳng hạn mới trả tiền. Thế nhưng một năm sau phải trả bao nhiêu tiền. Có thể trả 1000 đồng không? Tất nhiên là không. Bởi vì nếu đem 1000 đồng đến gửi ngân hàng thì sau 1 năm ắt phải có tiền lãi, giả sử lãi suất ngân hàng là 5% một năm thì sau một năm sẽ trở thành 1050 đồng. Nếu năm nay mua hàng trả chậm mà sang năm chỉ trả 1000 đồng thì là quá tiện lợi nhưng chủ hàng sẽ bị thiệt. Vì vậy sau một năm tiền trả cho cửa hàng phải hơn 1000 đồng, ít nhất phải gồm cả lãi theo như lãi ngân hàng thì cũng phải trả đến 1050 đồng.

Như vậy số tiền 1050 năm sau tương đương với 1000đồng thời hiện tại.

Dựa vào công thức tính tiền lãi người ta sẽ tính giá trị tương đương một món tiền cho một năm sau (cả vốn lẫn lãi). Như vậy nếu biết giá trị tương đương vào thời điểm một năm sau (1050 đ) thì phải tính giá trị hiện tại?

Chúng ta có thể dùng các phương trình sau đây để giải đáp câu hỏi này.

Giả sử x là số vốn mà để một năm sau cả vốn lẫn lãi sẽ là 1050 đồng. Ta sẽ có phương trình:

$$x\,(1 + 5\%) = 1050 \text{ đ}$$

Giải phương trình ta có:

$$x = {}^{1050} / {}_{1+5\%} \text{ đ}$$

Vì vậy số vốn hiện tại để 1 năm sau nhận được cả vốn lẫn lãi 1050 đồng là 1000 đồng.

Vậy với số vốn là bao nhiêu để sau hai năm sẽ nhận được cả vốn lẫn lãi là 1100đ.

Giả sử x là số vốn bỏ ra để sau hai năm nhận được số tiền cả vốn lẫn lãi 1100 đồng, ta có phương trình

$$x (1 + 2 \times 5\%) = 1100 \text{ đ}$$

Từ đó $x = {}^{1100}/_{1+2 \times 5\%}$ đ

Như vậy số tiền 1100 đồng vào hai năm sau có giá trị tương đương với 1000 đồng vào hiện tại.

Tất cả các phép tính trên đều dựa vào giả thiết là lãi suất hàng năm là 5%. Nếu với lãi suất *p*% thì công thức sau đây cho phép tính số vốn x cần bỏ ra để sau n năm nhận được số tiền cả vốn lẫn lãi là *b*:



Giải thích ý nghĩa giá trị hiện tại và phương pháp tính toán, ta có thể bàn đến vấn đề bán hàng trả chậm.

Xét cho cùng thì hình thức bán hàng trả chậm có khác hình thức bán chịu. Trong hình thức bán hàng trả chậm, khi nhận hàng, khách hàng đã có trả một phần tiền hàng hoá họ đã mua. Ngoài ra trong hình thức trả chậm giữa chủ hàng và khách hàng có thoả thuận rõ ràng về thời hạn trả tiền theo kế hoạch đã định. Vậy dựa vào đâu người ta đặt kế hoạch bán hàng trả chậm? Sau đây ta xét một ví dụ.



Có một mặt hàng đồ điện dân dụng đơn giá là 2180 đồng. Một cửa hiệu muốn đặt kế hoạch bán hàng theo chế độ trả dần kế hoạch trả tiền như sau:

Lần đầu tiên trả 1000 đồng cho cửa hàng và nhận hàng. Sau đó mỗi tháng trả 200 đồng, quy định trả sáu lần trong thời hạn sáu tháng liền.

Theo kế hoạch, các lần trả tiền sau đều dựa vào việc tính giá trị hiện tại tương đương với số tiền phải trả trong các lần trả sau.

Giả sử cũng với lãi suất 5%, mỗi kì trả hàng 200 đồng.

Giá trị hiện tại tương đương với 200đ khi trả hàng là:

$$x_1 = \frac{200}{1 + 1 \times 5\%} = 199 \text{ đ}$$

200 đồng trả trong kì thứ hai tương đương với số tiền thời hiện tại x2 là:

$$x_2 = \frac{200}{1 + 2 \times 5\%} = 198{,}01 \text{ đ}$$

Các lần trả thứ ba, thứ tư...sẽ là

$$x_3 = \frac{200}{1 + 3 \times 5\%} = 197{,}04 \text{ đ}$$

$$x_4 = \frac{200}{1 + 4 \times 5\%} = 196{,}08 \text{ đ}$$

$$x_5 = \frac{200}{1 + 5 \times 5\%} = 195{,}12 \text{ đ}$$

$$x_6 = \frac{200}{1 + 6 \times 5\%} = 194{,}17 \text{ đ}$$

Tổng cộng cả số tiền đã trả trước 1000 đồng thì giá trị phải trả cho món hàng ở các lần sau tương đương với:

1000 + 199 + 198,01 + 197,04 + 196, 08 + 195,12 + 197,12 = 2179,12 đ

Như vậy tổng cộng số tiền mà khách hàng phải trả để mua món hàng là:

1000 + 6 x 200 = 2.200 đ

Nhưng số tiền chỉ tương đương với 2179,12 đồng thời hiện tại so với số tiền phải trả nếu trả tiền ngay là 2180 đồng không sai khác bao nhiêu.

Từ khoá: *Trả hàng chậm định kì.*

143. Thế nào là lợi ích giao dịch trái phiếu?

Trái phiếu do nhà nước, chính quyền địa phương hoặc các xí nghiệp phát hành làm chứng từ chịu trách nhiệm trả nợ. Ví dụ với trái phiếu có mệnh giá 100 đồng thời hạn ba năm, đến kì hạn sẽ phải trả 115 đồng. Trái phiếu là loại chứng từ có mệnh giá. Trái phiếu không phải là tiền, không thể trực tiếp lưu thông trên thị trường trong việc mua bán. Trái phiếu cũng không phải là sổ tiết kiệm, không thể đem đổi chác. Có hai loại trái phiếu, có loại có thể đem bán, có loại có thể không bán được. Loại trái phiếu muốn bán được, sau khi phát hành phải đem chào và công bố trên thị trường, nếu được phê chuẩn có thể đem giao dịch trên thị trường chứng khoán.

Ở những nước có nền kinh tế thị trường phát triển, trên thị trường giao dịch chứng khoán thường có rất nhiều loại trái phiếu. Nếu muốn mua bán trái phiếu, bạn có thể tìm hiểu giá cả của các loại trái phiếu trên báo chí, tìm hiểu giá trị của trái phiếu từng ngày.

Nếu muốn mua trái phiếu, bạn phải dựa vào lợi ích giao dịch của trái phiếu.

Thế lợi ích giao dịch của trái phiếu là gì?

Xin nêu một ví dụ: Mỗi loại trái phiếu, trên tờ trái phiếu có ghi mệnh giá ví dụ 100 đồng, thời hạn hoàn trả là ba năm, lãi suất mỗi năm là 5%. Nếu tính đơn giản thì sau ba năm cả vốn lẫn lãi sẽ là:

$$100\ (1 + 3 \times 5\%) = 115\ đ.$$

Trong thời hạn phát hành một năm, mệnh giá giao dịch của trái phiếu sẽ là 103 đồng. Nếu mệnh giá trái phiếu này được lên điểm ví dụ (10 điểm), giả thiết công ty chứng khoán chi mỗi phân 0,20 đồng, thì khi đến kì họ sẽ phải chi trả (qua hai năm) thì dự kiến sẽ thu lợi được là:

$$(115 - 103{,}2) \times 10 = 118\ đ$$

Tính ra mỗi năm thu lợi được

$$118 : 2 = 59\ đ$$

Với gốc 1032 đồng thu lợi 59 đồng thì lãi suất tính ra sẽ là:

$$^{59}/_{1032} = 5{,}72\%$$

Đó là lợi ích giao dịch hằng năm của trái phiếu. Giá trị lợi ích đã vượt quá lợi ích quy định. Nói chung lúc này người mua trái phiếu có lợi và người bán thì bị thiệt. Tuy nhiên đó không phải là tuyệt đối, bởi vì giá trị của trái phiếu có thể thay đổi tuỳ lúc. Trong các ngày giao dịch, giá giao dịch của trái phiếu bị giảm, bấy giờ người bán lại được lợi.

Dễ dàng tìm thấy công thức tính lợi ích giao dịch sẽ là

$$\frac{\text{Tổng lợi ích lúc đến kì hạn - giá mua (trị giá bảo đảm)}}{\text{Giá mua} \times \text{Suất trả lãi}} \times 100\%$$

Từ khoá: *Trái phiếu; Lợi ích giao dịch trái phiếu.*

144. Vì sao mua cổ phần đầu tư độ mạo hiểm thấp hơn mua cổ phiếu?

Từ khi nền kinh tế thị trường bắt đầu phát triển, việc lưu thông tiền tệ trong nước không ngừng xáo động, tăng trưởng. Tầng lớp thị dân ở các thành phố tìm mọi cách đầu tư nhằm mục đích ngày thêm giàu có. Con đường đầu tư ngày càng nhiều, càng xuất hiện nhiều đường ngang ngõ tắt. Người ta đã không còn thoả mãn với cách thức gửi tiền ngân hàng lấy lãi mà còn mua cổ phiếu, trái phiếu, buôn bán nhà đất v.v... hy vọng sẽ thu lợi nhiều hơn việc gửi tiền cho ngân hàng. Nhưng với các loại đầu tư kể trên đều ít nhiều mang tính rủi ro: có lúc có thể đem lại lợi nhuận rất cao, nhưng khi gặp rủi ro có khi không thu được đồng lợi nhuận nào mà có thể bị mất trắng. Để việc đầu tư tiền đỡ gặp rủi ro, cần chọn hình thức đầu tư. Việc mua bán chứng khoán cũng là một con đường đầu tư. Muốn mua chứng khoán cần chọn loại hoặc đầu phiếu hoặc trái phiếu, hoặc mua cổ phần đầu tư, nên mua lúc nào, bán lúc nào v.v... đó là những vấn đề cần cân nhắc kĩ lưỡng. Hiện có nhiều hình thức mua chứng khoán nhưng nên chọn hình thức nào ít rủi ro nhất: mua đầu phiếu hay mua cổ phần đầu tư.

Trước hết ta xét một ví dụ đơn giản, giả sử có hai người là A và B cùng chơi trò đánh bạc hoàn toàn may rủi (ý nói không chơi gian). Mỗi lần chơi 1 đồng. Cơ hội để A hoặc B thắng 1 đồng hay thua 1 đồng là như nhau, và đều bằng $^1/_2$. Giả sử lúc bắt đầu chơi, A và B đều có sẵn số tiền là a và b tương ứng. Trò chơi được tiến hành đến khi có một bên thua sạch thì ngừng. Hỏi đến lúc ngừng chơi, khả năng để A sạch túi là bao nhiêu?

Ta thử tính sau một lần chơi bạc trung bình các kết quả mà A chờ đợi là bao nhiêu? Sau một lần chơi, khả năng để *A* có hoặc $a + 1$ đ hoặc $a - 1$ đ là như nhau và bằng $^1/_2$, vì vậy bình quân sau một lần chơi A có thể vẫn có a đồng. Qua hai lần chơi, tình huống được thua bạc của A có thể có bốn loại.

(được, được) (được, thua) (thua, được) (thua, thua).

Cả bốn tình huống đều có khả năng ngang nhau. Vì vậy sau hai lần chơi số tiền của A có thể là $a + 2$ đ hoặc $a - 2$ đ (cả hai lần đều được hoặc cả hai lần đều thua) đều có khả năng bằng , còn khả năng A có a đồng (một được, một thua hoặc một thua, một được) có khả năng bằng . Vì vậy số tiền bình quân A có thể có là:

$$(a + 2)^1/_4 + a \times {}^1/_2 + (a - 2)^1/_4 = \text{a đồng}$$

Qua cách tính toán tương tự ta có thể tìm thấy dù qua bao nhiều lần chơi, số tiền bình quân mà A nhận được vẫn là *a* đồng.

Cũng lí luận tương tự, B cũng sẽ có *b* đồng sau một số lần chơi.

Kết thúc cuộc đánh bạc với A có thể có hai loại kết cục: có 0 đ tức *A* bị thua sạch túi hoặc $a + b$ đồng khi *B* bị thua sạch túi. Giả sử khả năng để *A* thua sạch là *x*, khả năng để B thua sạch túi là $1 - x$. Thế nhưng kết quả trung bình mà *A* chờ đợi lại là *a* đồng nên

$$0 \times x + (a + b) \times (1 - x) = a.$$

Từ đó ta có: $x = {}^b/_{a+b}$. Tức khả năng để *A* thua sạch túi là $^b/_{a+b}$. Tương tự khả năng để b thua sạch túi là $^a/_{a+b}$. Tức khả năng để hai người thua sạch túi là tỉ lệ ngược với số tiền họ có ban đầu.

Ta lại quay về việc trúng quả trong thị trường chứng khoán. Thị trường chứng khoán chính là một sòng bạc không có chơi gian (sòng bạc công bằng) trong đó có cả cơ may lẫn rủi ro. Với mỗi người đầu tư thì cơ may và rủi ro là như nhau. Một người tham gia mua đầu phiếu là tham gia một cuộc đánh bạc công bằng. Các đấu thủ có thể có cách đầu tư giống các đấu thủ khác, nhưng cũng có những người có vai vế: đầu tư vốn vào cơ cấu quản lí đòi hỏi vốn đầu tư lớn, có khả năng vượt xa những đối tượng khác. Vì vậy trong cuộc chơi bạc "công bằng" này khả năng thua sạch túi của ông ta ít hơn các đấu thủ khác nhiều, nói cách khác người này có đảm bảo để rủi ro thấp hơn các đối thủ bình thường khác.

Từ góc độ đó có thể nói đầu tư mua vốn có ưu thế hơn mua đầu phiếu.

Từ khoá: *Về trò đánh bạc.*

145. Phân tích mối tương quan giữa các thị trường chứng khoán khác nhau như thế nào?

Nhiều người đầu tư chứng khoán thường quan tâm đến vấn đề sau:

Các thị trường khác nhau có mối liên quan gì với nhau không? ở những nước lớn có nền kinh tế thị trường phát triển thường có nhiều thị trường chứng khoán song song tồn tại, liệu các thị trường chứng khoán này có mối liên quan nào với nhau không?

Phương pháp đơn giản để xem xét hai thị trường chứng khoán có liên quan gì với nhau không là xét chỉ số đầu phiếu có đồng tăng đồng giảm, hoặc cái này tăng cái kia giảm, hoặc không kể ở một thị trường tăng giảm như thế nào, ở thị trường kia không hề chịu ảnh hưởng.

Trong bảng dưới đây liệt kê sự tăng giảm tăng “+” hoặc giảm “-” ở hai thị trường chứng khoán *A* và *B* trong 10 phiên giao dịch:

Phiên giao dịch	Thị trường A	Thị trường B	Phiên giao dịch	Thị trường A	Thị trường B
1	+9,21	+2,43	6	+22,61	+7,61
2	+26,96	+9,05	7	-0,49	+0,59
3	-7,62	-3,10	8	+10,49	+4,86
4	-9,39	-2,92	9	+9,48	+7,36
5	-4,97	-1,99	10	-0,41	+2,23

Từ bảng trên đây cho thấy, trong 10 phiên giao dịch có năm ngày cả hai thị trường đều có chỉ số đầu phiếu cùng tăng, ba ngày cả hai thị trường cùng có chỉ số đầu phiếu giảm, chỉ có hai ngày có một tăng một giảm, nên với hai thị trường chứng khoán đã xét tính đồng bộ khá tốt. Tuy nhiên khi ở hai thị trường đồng tăng hoặc đồng giảm cũng không đủ để khẳng định hai thị trường chứng khoán có mối liên quan lớn. Ta cần phải xem chỉ số tăng giảm có khác nhau nhiều không? Trong 10 ngày giao dịch này, chỉ số đầu phiếu trung bình là +5,651 và +2,612. Sự sai khác cho trong bảng:

Phiên giao dịch	Thị trường A	Thị trường B	Phiên giao dịch	Thị trường A	Thị trường B
1	+3,559	-0,182	6	+16,959	+4,998
2	+21,309	+6,438	7	-6,142	-2,022
3	-13,275	-5,712	8	+5,299	+2,248
4	-15,041	-5,532	9	+3,829	+4,748
5	-10,441	-4,602	10	-6,061	-0,382

Chúng ta thấy rằng chỉ số tăng giảm của hai thị trường cùng dương hoặc cùng âm xuất hiện ở chín ngày, chỉ có một ngày có một dương và một âm.

Để đánh giá tính đồng bộ một cách định lượng, chúng ta có thể dùng các con số để so sánh. Ta cần lấy số trung bình của độ tăng giảm của mỗi thị trường của 10 phiên giao dịch. Nếu như các tình trạng đồng dương hoặc đồng âm nhiều thì tính đồng bộ khá tốt. Nếu như đồng dương hoặc đồng âm nhiều thì tích của chúng sẽ là dương. Nhưng nếu một dương một âm nhiều (tính sai khác càng rõ) tích âm sẽ nhiều hơn. Nếu như dương, âm không có liên quan gì nhiều, thì số trung bình dần tiến đến 0. Ta tính được chỉ số tăng giảm bình quân của các tích số là:

C = [3,559 x (-0,182) + ...+ (-6,601) x (-0,382)] : 10 = 47,32.

Đây là giá trị trung bình về sự sai lệch giữa hai chỉ số tăng giảm của hai thị trường. Do ở hai chỉ số được tính toán không thống nhất để làm rõ tính tương quan ta cần xem xét độ lệch chuẩn của chỉ số tăng giảm của hai thị trường là 11,76 và 4,27. Chia độ lệch bình quân cho độ lệch chuẩn ta có:

p = 47,32 : (11,76 x 4,27) ≈ 0,94

Thương số này đánh giá độ tương quan của hai thị trường, người ta gọi đó là hệ số tương quan. Nếu số này là dương chỉ ra rằng mối tương quan giữa hai thị trường là lớn (và lớn nhất khi p = 1) và rõ rệt. Nếu hệ số tương quan là âm chứng tỏ thị trường không đồng bộ và mối quan hệ là phụ; giá trị âm càng bé thì mối tương quan giữa hai thị trường càng ít. Khi hệ số tương quan bằng 0 thì hai thị trường hoàn toàn không tương quan.

Dù các hệ số trên đây giải thích mối tương quan giữa hai thị trường. Các số liệu này chỉ tính theo số liệu của 10 phiên giao dịch nên còn xa mới có thể khái quát được tình hình phức tạp của thị

trường chứng khoán.

Từ khoá: *Phương sai chung; Hệ số tương quan.*

146. Xuất xứ của kí hiệu bốn phép tính số học +, -, x, ÷ và dấu = ở đâu?

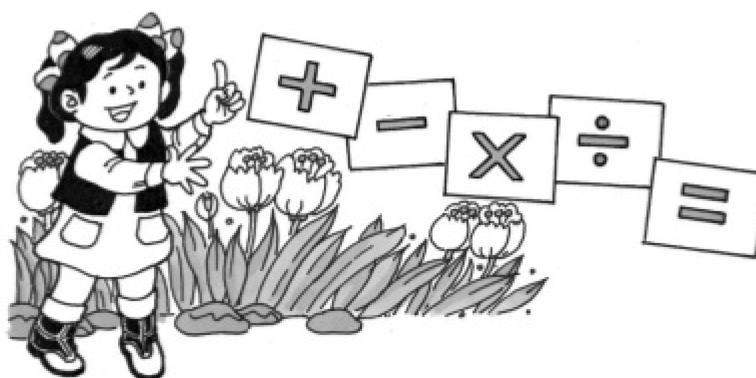
Mọi người đều rất quen thuộc với bốn phép tính số học và dấu bằng. Thế bạn có biết lai lịch của các kí hiệu này không?

Vào thời xa xưa, ở Hy Lạp và ấn Độ người ta thường viết các số ở cạnh nhau để biểu diễn phép cộng. Ví dụ như $3 + {}^1/_4$ sẽ viết là $3{}^1/_4$. Ngày nay người ta còn thấy vết tích của cách viết này khi viết số phân số. Họ cũng viết hai số cách xa nhau một khoảng để biểu diễn phép trừ, ví dụ viết $6\ {}^1/_5$ chính là để biểu diễn $6 - {}^1/_5$.

Vào thời Trung Cổ, thương nghiệp Châu Âu rất phát đạt. Một số thương nhân thường đánh dấu "+" trên các hòm để biểu thị trọng lượng quá nặng, còn vẽ dấu " - " để chỉ cái thùng là nhẹ và không đủ trọng lượng. Thời Phục hưng ở Italia, Leonardo de Vinci đã ghi các dấu "+" và dấu " - " lên các tác phẩm của mình. Năm 1489, một người Đức là Wideman đã chính thức dùng các kí hiệu "+" và "-" để biểu diễn phép tính cộng và phép tính trừ trong tác phẩm của mình. Về sau nhờ nhà toán học Pháp Viete hết sức tuyên truyền và cổ vũ, hai kí hiệu này mới được phổ cập và đến năm 1603 mới được mọi người thừa nhận.

Ở Trung Quốc thời xưa người ta đã dùng thẻ tính và bi tính để tiến hành các phép cộng, trừ, nhân và chia nhưng chưa đặt ra các kí hiệu chuyên môn để kí hiệu các phép tính. Hãy lấy đẳng thức "Lý Thiện Lan" nổi tiếng của nhà toán học Lý Thiện Lan làm ví dụ. Lý Thiện Lan đã dùng kí hiệu "⊥" để biểu diễn dấu "+" và dấu T để biểu diễn dấu "-". Nhưng ở các sách toán xuất bản vào cuối đời Thanh, người ta đã dùng cách mô tả thay cho kí hiệu. Sau Cách mạng Tân Hợi, người ta mới dùng kí hiệu như ngày nay.

Còn việc sử dụng dấu x và dấu ÷ thì phải đến 300 năm sau nữa. Năm 1631 Wiliam Autelite là người đầu tiên đã dùng dấu "x" để biểu diễn phép nhân, sau này người ta mới sử dụng phổ biến cho đến ngày nay.



Vào thời Trung Cổ, toán học ở các nước Arập tương đối phát triển. Nhà toán học lớn Watmet đã dùng kí hiệu "3/4" để biểu diễn phép chia của 3 cho 4. Nhiều người cho rằng cách viết phân số như ngày nay là xuất phát từ cách viết đó. Mãi đến năm 1630 mới xuất hiện dấu " ÷" để biểu diễn phép tính chia.

Ngày nay ở đa số các quốc gia, người ta dùng các kí hiệu "+" và "-" để biểu diễn phép tính cộng và phép tính trừ. Còn dấu "x" và dấu "÷" không phải được dùng thật phổ biến ở nhiều nước người

ta dùng dấu "." thay cho dấu "x" và dấu ": " thay cho dấu ÷.

Còn dấu "=" được ra đời từ bao giờ và ở đâu? Người Babilon và Ai Cập đã từng dùng các kí hiệu khác nhau để biểu diễn sự bằng nhau. Còn dấu "=" được sử dụng sớm nhất trong tác phẩm "Hòn đá mài trí tuệ" của Reked. Thế nhưng dấu "=" mãi đến thế kỉ XVIII mới được phổ biến rộng rãi.

Từ khoá: *Kí hiệu phép tính số học.*

147. Số π được tính như thế nào?

Số pi (π) là gì?

Số pi là tỉ số giữa chu vi vòng tròn với đường kính. Cho dù vòng tròn có to đến mấy thì tỉ số này vẫn như vậy, nên đó là một hằng số. Trong toán học người ta gọi là số pi. π là chữ cái đầu tiên trong từ chu vi của tiếng Hy Lạp.

Trong cuộc sống hàng ngày, trong hoạt động sản xuất, số π được sử dụng rất rộng rãi và cũng là một số rất đặc biệt.

Nhưng giá trị của số π bằng bao nhiêu?

Từ xưa đến nay, không biết có bao nhiêu nhà toán học đã lao tâm khổ tứ để tính số π và tính giá trị số π ngày càng chính xác hơn. Nói chung để tính số π người ta lợi dụng chu vi của các đa giác đều nội tiếp hoặc ngoại tiếp vòng tròn để thay thế gần đúng chu vi của vòng tròn. Ban đầu người ta cho rằng có thể tính được đến cùng toàn bộ giá trị của số π. Thế nhưng tính đi tính lại, càng tính lại càng thấy không thể tính được đến cùng. Mãi đến thế kỉ thứ XIX, nhà toán học Đức Lindeman (1882) mới chứng minh được số π là số vô tỉ (số thập phân vô hạn, không tuần hoàn) theo một quy tắc nhất định có thể tính đến vô hạn, không giống như phân số như $^1/_3$, tuy là "vô tận" nhưng lại đơn giản. Dưới đây chúng ta sẽ xem xét cống hiến của các nhà toán học về cách tính số π.

Từ xa xưa ở Trung Quốc đã có câu "chu vi ba, đường kính một" (tức π = 3). Ngay từ năm 100 trước Công nguyên (vào thời Tây Hán) trong sách "Chu bì toán kinh" đã có nói về vấn đề này. Đến thời Đông Hán, nhà toán học, thiên văn học Trương Hoành (năm 78- 139) đã dùng một số kì diệu là căn bậc hai của số 10 làm số π ($\sqrt{10}$ = 3,16). Đây là con số rất dễ nhớ. Vào thời Nguỵ - Tấn, nhà toán học Lưu Huy, vào năm 263 trong tác phẩm "Sách toán chín chương" đã chỉ ra rằng "Chu vi ba, đường kính một" chỉ là tỉ số giữa chu vi của hình lục giác đều nội tiếp trong vòng tròn với đường kính của vòng tròn, do đó chỉ có thể dùng để tính diện tích của hình đa giác đều 12 cạnh nội tiếp trong vòng tròn. Để tính được diện tích hình tròn chính xác hơn, ông đã sáng tạo phương pháp cắt nhỏ vòng tròn. Dùng phương pháp chia nhỏ vòng tròn ông đã tính diện tích của hình 192 cạnh đều nội tiếp trong vòng tròn và tìm được số π = $^{157}/_{30}$ = 3,14. Về sau Lưu Huy lại tiếp tục tính diện tích của hình đa giác 3072 cạnh đều nội tiếp trong vòng tròn và tính được số π đến độ chính xác π = $^{3927}/_{1250}$ = 3,1416. Lưu Huy đã dùng phương pháp tính diện tích của các đa giác đều nội tiếp trong vòng tròn để tìm giá trị gần đúng diện tích của hình tròn chính là quan niệm giới hạn, một sáng tạo rất lớn trong toán học.

Thành tích tính số π rực rỡ hơn là của Tổ Xung Chi thời Nam - Bắc Triều (năm 429- 500). Ông đã tính được số π là số ở giữa hai số 3,1415925 và 3,1415927, không hề có chữ số nào sai. Đây chính là số π với bảy số lẻ đầu tiên trên thế giới. Thành quả này của Tổ Xung Chi được ghi trong sách "Xuyết thuật". Về sau Tổ Xung Chi còn đưa ra hai giá trị số π khác viết dưới dạng phân số đó là "ước số" π = $^{22}/7$ = 3,14 và "mật số" π = $^{355}/_{113}$ = 3,1415929. ước số chính bằng số π do Archimède, nhà toán học Hy Lạp đã tính ra trước đó. Thế nhưng mật số thì mãi đến thế kỉ XVI mới được xuất hiện ở Châu Âu do nhà toán học Pháp Otto (1550 - 1605) và nhà toán học Hà Lan

Antoniss (1527 - 1607) tính ra. So với Tổ Xung Chi thì muộn hơn đến hơn 1000 năm. Hiện nay có một dãy núi ở phía sau Mặt Trăng được đặt tên là Tổ Xung Chi để tỏ lòng ngưỡng mộ của thế giới đối với ông.

Từ sau thế kỉ XV, khoa học kĩ thuật ở Châu Âu phát triển hết sức mạnh mẽ. Các nhà nghiên cứu về cầu phương (tìm một hình vuông có diện tích tương đương với hình tròn) ngày càng nhiều, nhờ vậy giá trị số π ngày càng được tính chính xác hơn. Người ta cho rằng số π càng tính được với nhiều số lẻ chừng nào thì càng quí. Phát minh này đã được nhà toán học Đức Rudolph (1540 - 1610) tính ra. Qua việc tính chu vi của hình 2^{62} cạnh đều nội tiếp, ông đã tính ra số π với 35 số lẻ, qua kiểm tra của nhà toán học không có chữ số nào bị sai. Ông thấy rất tự hào và để lại di chúc khắc 35 chữ số này lên bia mộ của ông. Vì vậy cho đến nay có người Đức vẫn gọi số π là "số Rudolph".

Từ sau thế kỉ XVII, với sự phát triển và hoàn thiện của phép tính vi phân, tích phân, cách tính số π có sự thay đổi về bản chất. Từ việc tính số π dựa vào tính độ dài của các hình nhiều cạnh để chuyển sang việc tính tổng các chuỗi số giảm dần. Đây là phương pháp tính toán dựa vào khai triển theo cấp số của các hàm lượng giác ngược.

Ví dụ: Hàm arctan

$$x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots + (n-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

(|x| ≤ 1)

Và chú rằng arctan 1 = $^{\pi}/_{4}$. Trong công thức trên nếu

x = 1 ta sẽ thu được công thức Leibnitz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots$$

Đây là cách dùng chuỗi số vô hạn để tính số π đơn giản nhất, nhưng rất khó tính toán vì các số hạng giảm dần với tốc độ rất nhỏ, cho dù dùng số các số hạng của chuỗi đến rất lớn. Do vậy người ta đã không ngừng đi sâu tìm các hàm số lượng giác ngược có thể tìm được công thức tính số π hữu hiệu nhất. Ví dụ các công thức.

$$\pi = 20\arctan\frac{1}{7} + 8\arctan\frac{3}{79}(Euler - Weija)$$

$$= 16\arctan\frac{1}{5} - 4\arctan\frac{1}{239}(Martin)$$

$$= 16\arctan\frac{1}{5} - 4\arctan\frac{1}{70} + 4\arctan\frac{1}{99}(Rutherthord)$$

Nhờ các thành quả của phép tính vi phân, tích phân, việc tính số π đã bước vào thời kì mới. Số các con số lẻ sau dấu phảy được tăng rất nhanh: Vào năm 1706 đạt đến 100 chữ số (Martin), năm 1794 đến 140 chữ số (Weija), năm 1824 đến 152 chữ số (Rutherford), năm 1844 đạt đến 205 chữ số

(Daize), năm 1853 đến 400 chữ số (Rutherford), năm 1855 đã đến 500 chữ số (Leibauder). Kỉ lục về số π ở cuối thế kỉ XIX do một nhà toán học Anh W. Schanks có 707 chữ số thập phân, tính và công bố vào năm 1874. Điều cần chú ý là số π do ông tính được chỉ chính xác đến chữ số 528, còn các chữ số phía sau thì sai. Đến năm 1947 số π được tính đến 808 chữ số lẻ (Fuchlin). Đó là kỉ lục cao nhất được ghi lại trước khi máy tính điện tử ra đời.

Từ khi xuất hiện máy tính điện tử, việc dùng máy tính điện tử đã làm cho số chữ số lẻ thập phân của số π tăng nhanh với tốc độ kinh người. Ngay từ năm 1949 đã có người trong vòng một ngày đêm đã tính được số π với 2048 chữ số lẻ (trong đó có 2037 chữ số chính xác); đến năm 1967, số π đã có 50 vạn chữ số, năm 1988 đạt đến 200 triệu chữ số, năm 1989 đến 1 tỉ chữ số.

Việc tính số π đến độ chính xác như vậy thì tổ tiên của chúng ta thật khó mà nghĩ tới và vượt ra mọi khuôn khổ cho các ứng dụng vào thực tiễn. Các tính toán như thế này chứng tỏ tính kì lạ của số π, không phải để chứng tỏ khả năng của máy tính.

Từ khoá: *Số π; Thuật chia vòng tròn; Lưu Huy; Tổ Xung Chi; Cấp số.*

148. Giải thưởng quốc tế về toán học là gì?

Nobel là giải thưởng khoa học kĩ thuật quốc tế danh vọng lớn nhất thế giới. Đây là giải thưởng được Nobel, nhà hoá học lừng danh đem một phần di sản của mình làm vốn để thiết lập giải. Các hạng mục của giải Nobel không ít, bao gồm nhiều ngành: Vật lí, hoá học, sinh lí học hoặc y học, văn học, sự nghiệp hoà bình, kinh tế học v.v... nhưng không có giải dành cho toán học.

Trong toán học cũng có giải thưởng quốc tế dành cho các nhà toán học ưu tú do nhà toán học Fields đặt ra.

Fields là nhà toán học Canada, sinh năm 1863, mất năm 1932. Về mặt học thuật, Fields không có cống hiến gì đột xuất nhưng ông là nhà tổ chức nghiên cứu toán học giỏi, có uy tín lớn trong giới khoa học. Năm 1924, trong một hội nghị khoa học tổ chức ở Toronto, Fields đã kiến nghị đại hội trích kinh phí để lập nên một giải thưởng toán học. Khi qua đời ông đã di chúc để lại gia sản làm phần tiền vốn làm cơ sở cấp các giải thưởng. Fields cũng kiến nghị không lấy tên của bất kì tổ chức, cơ cấu nhà nước hoặc cá nhân đặt tên cho giải thưởng khoa học này. Thế nhưng đại hội của các nhà toán học thế giới quyết định đặt tên cho giải thưởng này là “giải thưởng Fields” để ghi nhớ công lao của ông.

Vào năm 1936, tại Đại hội Quốc tế Các nhà toán học lần thứ 10 ở Auslin, giải thưởng Fields đầu tiên được trao cho các nhà toán học trẻ quốc tịch Mỹ gốc Phần Lan Alfus và nhà toán học Mỹ Tocaras. Từ đó về sau cứ mỗi lần đại hội các nhà toán học quốc tế thì hạng mục đầu tiên là việc xét tặng giải thưởng Fields. Đối với giới toán học quốc tế những người được tặng giải thường có uy tín rất cao, được giới báo chí chăm sóc, theo dõi quan tâm. Cho đến nay giải thưởng Fields được công nhận là giải thưởng khoa học có danh tiếng cao, có người còn cho đó chính là “giải Nobel cho giới toán học”.

Cho đến nay đã có mấy chục người được tặng giải thưởng Fields. Nhà toán học quốc tịch Mỹ gốc Hoa Khưu Thành Đồng là một trong những người đó: Khưu Thành Đồng sinh ra ở tỉnh Quảng Đông năm 1949, sau đó theo gia đình di cư sang Hồng Công. Năm 1965 thi vào trường Đại học, khoa toán hệ trung văn. Học đến năm thứ ba, tài năng toán học của Khưu Thành Đồng được nhà toán học nổi tiếng Trần Tỉnh Thân phát hiện. Về sau Khưu Thành Đồng theo Trần Tỉnh Thân đến bang California làm nghiên cứu sinh tại trường Đại học Berkeley. Dưới sự bồi dưỡng của Trần Tỉnh Thân, Khưu Thành Đồng tiến bộ rất nhanh, năm 22 tuổi nhận học vị tiến sĩ, năm 28 tuổi được phong học hàm giáo sư. Do những thành tích xuất sắc của mình, năm 1978, tại Đại hội Các nhà toán học quốc tế, Khưu Thành Đồng được mời đọc một báo cáo khoa học trong một giờ. Năm 1981, ông được nhận giải thưởng Phạm Hi Luân; năm 1982, ông đã được tặng giải thưởng Fields.

Ngoài giải Fields, giới toán học còn có giải thưởng Wolf. Vào năm 1976, Wofl cùng dòng họ hiến tiền của để lập giải thưởng Wolf. Giải thưởng Wolf có năm loại: vật lí, hoá học, y học, nông nghiệp và toán học. Đến năm 1981 lại thêm giải thưởng nghệ thuật. Việc xét tặng giải thưởng do các nhà khoa học nổi tiếng trên thế giới tổ chức tiến hành mỗi năm một lần. Giải thưởng bắt đầu xét tặng từ năm 1978 và đến năm 1985 thì ngừng. Đã có 74 nhà khoa học được tặng giải thưởng Wolf, trong số đó có 14 nhà toán học. Nhà toán học quốc tịch Mỹ gốc Hoa Trần Tĩnh Thân được tặng giải thưởng Wolf vào năm 1984.

Từ khoá: *Giải thưởng Fields, giải thưởng Wolf.*

149. Cuộc thi toán ra đời từ bao giờ ?

Những người yêu thích toán học đều biết các cuộc thi toán học. Thế nhưng các bạn có biết các cuộc thi toán bắt đầu từ bao giờ không?

Ở Trung Quốc các cuộc thi toán bắt đầu từ năm 1956. Bấy giờ chính là lúc bắt đầu thực hiện kế hoạch 5 năm lần thứ nhất (1953 - 1957). Nhà nước hết sức coi trọng văn hoá - khoa học, và đưa ra khẩu hiệu “tiến quân vào khoa học kĩ thuật”.



Dưới sự lãnh đạo của nhà toán học lão thành Hoa La Canh, ở hai thành phố Bắc Kinh, Thượng Hải bắt đầu có các hoạt động triển khai cuộc thi. Bấy giờ quy mô các cuộc thi không lớn, chỉ tổ chức cho các học sinh cấp ba tham gia. Người đạt giải nhất trong cuộc thi năm đó là Uông Gia Cang một học sinh trường phổ thông cấp ba Thượng Hải. Hiện nay Uông Gia Cang là giáo sư trường Đại học Cơ Lí Hoa Đông, là chuyên gia về xác suất và thống kê.

Trên phạm vi thế giới, nơi tổ chức cuộc thi toán sớm nhất là Hungari. Từ năm 1894, ở Hungari đã bắt đầu các cuộc thi toán cho đến nay đã hơn 100 năm. Chính nhờ các cuộc thi toán này mà ở Hungari đã xuất hiện nhiều nhà toán học ưu tú, Hungari nhờ đó trở thành cường quốc về toán học.

Các biện pháp thực hiện của Hungari được nhiều nước khác coi trọng, nhiều quốc gia cũng theo bước Hunggari mở các cuộc thi toán:

Tên nước	Năm

Rumania	1902
Liên Xô	1934
Bungari	1949
Ba Lan	1950
Tiệp khắc (nay là nước Cộng hòa Sec và Slovai)	1951
Trung Quốc	1956
Cộng hòa dân chủ Đức(trước đây)	1961
Việt Nam	1962
Nam Tư	1962
Hà Lan	1962
Mông Cổ	1963
Anh	1965
Phần Lan	1965
Israel	1968
Canađa	1969
Cộng hòa Liên bang Đức (trước đây)	1970
Ôxtraylia	1971
Mỹ	1972

Từ năm 1959 ở một số nước Đông Âu bắt đầu các cuộc thi toán quốc tế (thi toán quốc tế Olympic), đến năm 1960 cuộc thi mở rộng đến các nước phương Tây.

Trên đây chúng ta vừa nói đến các cuộc thi toán tổ chức cho các học sinh trung học phổ thông. Ngày nay quy mô các cuộc thi toán ngày càng mở rộng cho nhiều bậc học từ học sinh tiểu học, phổ thông cơ sở, cho các cuộc thi chuyên toán. Ở Trung Quốc có cuộc thi toán mang tên "Cuộc thi Hoa La Canh" nổi tiếng.

Người ta cũng đã tổ chức cuộc thi toán cho các sinh viên những năm đầu bậc đại học. Ví dụ như cuộc thi Pudnan bắt đầu ở Mỹ năm 1938. Pudnan là hiệu trưởng trường Đại học Harvard nước Mỹ, kinh phí cho cuộc thi là do Pudnan cung cấp.

Các cuộc thi đã đào tạo không ít nhân tài, đây là điều được mọi người nhất trí công nhận. Đương nhiên không phải bất cứ người nào đạt giải thưởng cũng đều có các thành tựu xuất sắc trong tương lai, ở đây có thể do không ít nguyên nhân khách quan, nhưng cũng nói lên một điều là không phải mọi đề toán cho cuộc thi hẳn đã đo được toàn bộ năng lực để có thể thành tài.

Từ khoá: *Các cuộc thi toán.*

150. Vì sao môn toán được tất cả các nước trên thế giới chọn làm môn học chính ở bậc phổ thông?

Trong chương trình học của bậc học phổ thông, toán, văn và ngoại ngữ được xem là ba môn học chính. Trong các năm học từ cấp một đến cấp ba, năm nào cũng có môn toán. Vì sao ở tất cả các nước, môn toán được xem là môn học chính ở các năm học ở bậc phổ thông?

Trước hết phải nói toán, văn và ngoại ngữ cũng đều là tiếng nói. Toán học cũng là tiếng nói. Toán học dùng các kí hiệu, chữ số, công thức, hình vẽ, khái niệm, mệnh đề và luận chứng cùng các thủ thuật đã diễn tả hết sức chính xác về thế giới trong mối quan hệ về số lượng cũng như mối quan hệ vị trí trong không gian. Không hiểu toán học, không thể lí giải mọi vấn đề khoa học.

Mặt khác, toán học giúp người ta năng lực tư duy. Nếu nói ngôn ngữ là phương thức để biểu diễn tình cảm, nguyện vọng, ý chí tư duy bằng hình tượng, thì toán học giúp người ta tư duy bằng cách khái quát trừu tượng, suy đoán bằng lí luận. Tư duy toán học có tính chất 1 là 1 mà 2 là 2, hết sức chính xác không có lầm lẫn, vì vậy toán học bồi dưỡng năng lực tư duy của con người ta hết sức có hiệu quả.

Cuối cùng toán học có phạm vi ứng dụng hết sức rộng rãi. Từ việc nhỏ như tính toán để mua hàng hoá cho đến việc lớn như thiết kế các hình dáng tên lửa, điều khiển các vệ tinh nhân tạo v.v... đều phải sử dụng toán học.

Vì vậy tất cả chúng ta đã học toán từ bé.

Từ khoá: *Toán học.*

Các nhà khoa học nhận được giải thưởng Nobel thuộc nhiều lĩnh vực: Vật lí, hoá học, y học, kinh tế học v.v.. thế nhưng không có giải Nobel cho toán học. Lí do tại sao thì cho đến nay người ta vẫn chưa biết. Có người dự đoán Nobel cho rằng toán học và các khoa học có nhiều điểm khác nhau: khoa học nghiên cứu hiện thực khách quan, quan sát được chính xác các hình thái của sự vật, còn toán học nghiên cứu các con số, các hình, các khái niệm trừu tượng và hai bên rõ ràng là có nhiều khác biệt.

Đương nhiên đó chỉ hoàn toàn là các dự đoán.



Tuy nhiên, toán học là công cụ nghiên cứu khoa học có năng lực rất mạnh, nhiều thành quả trọng đại trong khoa học chủ yếu dựa vào toán học mà tìm ra, vì vậy có nhiều nhà toán học đã nhận giải thưởng Nobel. Ví dụ nhà toán học nổi tiếng của Liên Xô trước đây Kantorovitch nhờ phương pháp quy hoạch tuyến tính đã nhận được giải thưởng Nobel về kinh tế năm 1971. Nhà toán học Amahe và Hounsfield đã dùng phương pháp toán học hoàn thành kĩ thuật cắt lớp có cống hiến to lớn trong chẩn đoán y học nên đã nhận được giải Nobel y học năm 1979. Hofton đã dùng phương pháp toán học trong nghiên cứu cấu trúc tinh thể và đã nhận được giải thưởng Nobel hoá học năm 1985.

Do đó có thể thấy toán học và khoa học là không thể tách rời nhau được. Muốn đạt được thành tích kiệt xuất trong khoa học không thể thiếu công cụ toán học.

Khi còn trẻ tuổi nên cố gắng học tốt toán để làm cơ sở chắc chắn cho tương lai.

Từ khoá: *Giải thưởng Nobel; Nhà toán học; Toán học.*

Từ khi xã hội loài người chuyển từ chế độ mẫu hệ sang chế độ phụ hệ, các nước trên thế giới

thịnh hành tâm lí “nam giới là cao quí, nữ giới là thấp hèn”, “trọng nam khinh nữ”. Người phụ nữ không có địa vị cao trong xã hội, do đó có ít các nhà khoa học nữ.

Do công cuộc cải cách “bình đẳng nam nữ” từ cuối thế kỉ XIX và đầu thế kỉ XX tình hình có thay đổi chút ít. Nhà bác học nữ Ba Lan Marie Curie hai lần nhận được giải thưởng Nobel; một giải về vật lí, một giải hoá học. Nhà nữ vật lí Trung Quốc Ngô Kiên Hùng là hội trưởng đầu tiên của hội vật lí Mỹ. Họ là đại biểu cho các nhà khoa học nữ kiệt xuất. Nhiều nữ thanh niên đã lấy họ làm tấm gương cho bước đường khoa học của mình.

Các nhà bác học nữ thuộc các ngành vật lí, hoá học, y học v.v... đã đạt được những thành tựu tương đối lớn, nhưng trong lĩnh vực toán học thì thành tựu của các nhà khoa học nữ vẫn còn khá ít. Điều đó liên quan đến sự kì thị của giới toán học đối với nữ giới. Nữ giáo sư toán học đầu tiên trên thế giới là nhà toán học nữ người Nga Kovalevkaia. Thế nhưng bà đã không tìm được việc làm ở Nga, về sau, vào năm 1889 trở thành giáo sư trường Đại học Kalma, Thuỵ Điển. Vào thế kỉ XX có nhà nữ toán học vĩ đại Noether người Đức, là người đã đặt cơ sở cho môn đại số trừu tượng. Nhưng bà chỉ được là giảng viên trường Đại học Gottingen chứ không được là giáo sư.

Sau Đại chiến thế giới thứ hai, tình hình đã có nhiều thay đổi Robinson được bầu làm Hội trưởng Hội toán học của Mỹ. Giáo sư Hồ Hoà Sinh là nữ viện sĩ đầu tiên của Viện hàn lâm khoa học Trung Quốc. Năm 1998, ở Mỹ có 1216 tiến sĩ toán học, trong đó có 919 người là nam giới còn lại 297 là nữ giới, số nữ tiến sĩ toán học chiếm tỉ lệ 1/4.

Theo các nghiên cứu giáo dục chứng minh rằng khả năng về toán học của nữ giới không có gì khác biệt so với nam giới. Việc cho rằng nữ giới không hợp với toán học hoàn toàn không có căn cứ. Cho nên có thể dự đoán tuỳ theo sự tiến bộ xã hội và quan niệm nam nữ bình đẳng, trong tương lai số các nhà toán học nữ sẽ không hề thua kém số các nhà toán học nam.

Từ khoá: *Các nhà khoa học.*

Có câu chuyện vui còn truyền lại. Ngày xưa có một phú ông mời thầy giáo về dạy cho con học chữ. Ngày thứ nhất thầy dạy cho cậu học sinh viết chữ “nhất” (-) là một (có một nét gạch ngang). Ngày thứ hai thầy dạy cậu bé viết chữ “nhị” (=) là hai (có hai nét gạch ngang). Ngày thứ ba thầy dạy cậu bé viết chữ “tam” (≡) là ba (có ba nét gạch ngang). Cậu bé liền báo với cha là đã học hết vốn liếng của thầy. Do vậy phú ông cho thầy thôi việc luôn. ít lâu sau, phú ông muốn mời cơm một vị khách họ “vạn” (có nghĩa là một chục nghìn). Phú ông bảo cậu con trai viết thư mời. Kết quả là cậu bé ngồi viết từ sáng đến trưa mà chưa xong cái thư. Phú ông sốt ruột liền mở cửa thư phòng (phòng đọc sách) để xem tình hình. Ông ta nhìn thấy trên mặt đất la liệt các tờ giấy có vẽ một nét gạch ngang. Cậu bé buồn rười rượi nói với bố “Khách của bố chả ra sao, viết suốt nửa ngày vẫn chưa xong được họ Vạn của ông ta. Cả chục nghìn nét gạch ngang chắc cả ngày con cũng vẽ chưa xong”.

Sự thực từ buổi sơ khai nền văn minh của loài người, loài người đã tìm cách ghi các con số bằng cách viết quả không đơn giản, cũng giống như cậu bé con nhà giàu nọ viết chữ “vạn” vậy. Cùng với việc cải thiện đời sống của người nguyên thủy và sự hình thành các bộ lạc, nhu cầu các hoạt động có quy mô lớn với một số lượng lớn các đối tượng tham gia lần lượt xuất hiện. Loài người mong tìm cách ghi lại được các con số bằng các chữ số để biểu thị các số.

Người cổ La Mã đã tìm được bảy kí hiệu để biểu diễn các chữ số. Ví dụ I biểu diễn số 1, kí hiệu V biểu diễn số năm, X biểu diễn số 10, L biểu diễn số 50, C số 100, D biểu diễn con số 500, M là số 1000. Để viết các chữ số khác, người ta dựa vào quy tắc ở bên trái thì trừ, ở bên phải thì cộng mà viết các số phức hợp. Ví dụ với số có hai chữ số, chữ số bên phải có giá trị nhỏ hơn chữ số bên trái, thì số thu được sẽ là tổng giá trị hai chữ số cộng lại. Nếu ngược lại, chữ số bên phải có giá trị lớn hơn chữ số bên trái, thì số phức hợp sẽ là hiệu của số lớn trừ số nhỏ. Ví dụ với chữ số La Mã

MCCXL chính là số 1240. Người cổ Ai Cập dùng cách viết lặp lại theo thứ tự nhất định để ghi số. Ví dụ số 1241 viết theo cách của người Ai Cập cổ là theo quy tắc từ phải sang trái của các kí hiệu "gặp 10 thêm 1" là tiếp cận với cách ghi số hiện đại "đếm theo hệ cơ số 10". Cách ghi số của người Ai Cập quả là độc đáo, thế nhưng chưa đủ tiện lợi. Với cách ghi này, với các con số càng lớn thì viết các dãy kí hiệu càng dài. Liệu có phương pháp ghi số nào đơn giản hơn không?

Đương nhiên là có, ước vào khoảng năm 770 - 221 trước Công nguyên tức là vào thời Xuân Thu - Chiến Quốc xuất hiện phương pháp ghi số bằng các que tính. Que tính là loại công cụ bằng tre, dùng để ghi số và tính toán, có công dụng giống như bàn tính. Phương pháp ghi số theo vị trí các chữ số là ý nghĩa số đơn vị, hàng chục, hàng trăm, hàng ngàn, hàng vạn... của các chữ số trong con số ghi ấn định theo vị trí các chữ số trong số ghi. Cách biểu diễn một số có nhiều chữ số giống như cách ghi bằng các chữ số Arập hiện tại, vị trí các chữ số được sắp xếp từ phải sang trái. Có hai cách ghi số bằng que tính dọc và ngang. Các chữ số hàng đơn vị, hàng trăm, hàng vạn ghi theo phương thức dọc, các chữ số hàng chục, hàng nghìn được ghi theo phương thức ngang.

Và số 1241 được ghi bằng que tính là

Dọc
(đơn vị, trăm, chục nghìn)

Ngang (chục, nghìn)



Từ cách biểu diễn số 1241 ta có thể thấy cách ghi số theo vị trí của các chữ số của Trung Quốc thật giản tiện, khéo léo. Chỉ cần chín kí hiệu kết hợp với vị trí đã tạo nên cách ghi số tiện lợi vì có thể ghi được các con số lớn bất kì chỉ cần chín kí hiệu kết hợp vị trí các kí hiệu là đủ. Phương pháp ghi số này được sử dụng rộng rãi trong các hoạt động sản xuất, trong thực tiễn, để tiến hành các phép tính cộng, trừ, nhân, chia. Đó là cơ sở đã giúp cho Trung Quốc có nền toán học phát triển khá sớm.

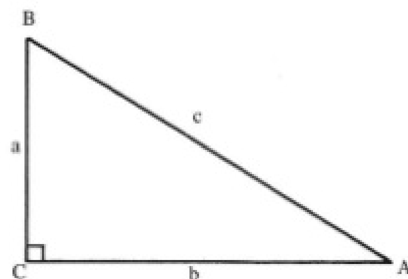
Cách ghi số theo vị trí cùng với thuốc nổ, la bàn, nghề in là các thành tựu xuất sắc của nền văn minh Trung Quốc đóng góp cho nhân loại.

Từ khoá: *Ghi số theo vị trí.*

Trong hình học phẳng có định lí nổi tiếng: Trong một tam giác vuông tổng bình phương các cạnh của góc vuông bằng bình phương cạnh huyền.

Cho tam giác *ABC* (như hình vẽ) góc $C = 90^0$. Giả sử $BC = a$; $AC = b$ $(a < b)$; $AB = c$, ta có $a^2 + b^2 = c^2$.

ở phương Tây người ta gọi đây là định lí Pithagore, còn ở Trung Quốc người ta gọi là "Định lí tam giác". Vì sao vậy?



Nguyên nhân là ở phương Tây người ta cho rằng định lí này được Pitago phát minh vào khoảng 500 năm trước Công nguyên, sớm hơn ở Trung Quốc. Thế nhưng ở Trung Quốc trong sách "Chu bì toán kinh" đã ghi lại câu chuyện trao đổi giữa Chu Công và Thương Dao trong đó có nêu bật mối tương quan giữa ba cạnh một tam giác vuông tỉ lệ với ba số: *a: b: c* = 3 : 4 : 5 (như hình vẽ). Mà Chu Công và Thương Dao là vào khoảng thế kỉ XII trước Công nguyên, so với Pithagore thì sớm hơn nhiều. Do đó đã có nhiều người Trung Quốc gọi định lí Pitago là định lí tam giác thay cho tên định lí Pitago.

Từ khoá: *Định lí Pitago, định lí tam giác.*

"Cửu chương toán thuật" ("Sách toán chín chương") là bộ sách toán cổ của Trung Quốc. Bộ sách ra đời vào đầu nhà Đông Hán (khoảng từ năm 50 - 100 sau Công nguyên). Bộ sách này dựa vào cơ sở của sách toán từ đời nhà Tần còn truyền lại, được sửa chữa và thống nhất để đáp ứng được những nhu cầu của xã hội thời bấy giờ. Trong sách tập hợp 246 vấn đề toán học và các giải pháp cho các vấn đề đó. Bộ sách được xếp thành 9 chương liên quan đến 9 vấn đề: 1. Phương điền (hay còn gọi là ruộng đất: trình bày bốn phép tính phân số, cách tính diện tích các hình phẳng). 2. Tô mễ (hạt ngô: trình bày cách chia và trao đổi lương thực); 3. Chia nhỏ (trình bày phép tính tỉ lệ). 4. Thiếu quảng (trình bày phép tính khai căn bậc hai và bậc ba). 5. Phương công (cách tính thể tích các hình). 6. Các bài toán về quản lí và vận chuyển lương thực. 7. Thừa và thiếu (về phép tính chia có số dư); 8. Phương trình; 9. Định lí tam giác.

Như vậy trong "Sách toán chín chương" đề cập đến nhiều lĩnh vực toán học như cách giải toán (thuật toán), hình học, đại số.

Về phương diện thuật toán trong sách trình bày có hệ thống các phép tính phân số, phép tính tỉ lệ, các phép tính chia có số dư.

Về phương diện hình học trong "Sách toán chín chương" chú trọng cách tính diện tích các hình tam giác, hình thang, hình tròn, hình xuyến, diện tích các quạt tròn, cũng như cách tính thể tích các hình thường gặp (hình trụ các loại, hình chóp, hình lăng trụ và ứng dụng định lí tam giác).

Về phương diện đại số trong sách có đề cập đến số dương, số âm, phép nâng lên bình phương, lập phương, khai căn bậc hai, bậc ba và phương pháp giải hệ phương trình bậc nhất.

"Sách toán chín chương" đã tập hợp được nhiều thành tựu toán học thời đó. Có nhiều nội dung được sách đề cập đầu tiên trên thế giới. Vì vậy sách không chỉ là trang huy hoàng trong lịch sử toán học Trung Quốc thời cổ mà còn là viên ngọc quí trong di sản toán học thế giới. "Sách toán chín chương" có ảnh hưởng lớn cho hậu thế. Trải qua gần 2000 năm, "Sách toán chín chương" đã nhiều lần được dịch, giải thích, truyền bá. Nhà toán học lớn thời Nguỵ Tấn là Lưu Huy đã giải thích về "Sách toán chín chương". Lưu Huy đã phát hiện nhiều điểm tinh tuý của toán học. Những sách toán của Trung Quốc trước thế kỉ XVI thường được khai thác từ "Sách toán chín chương".

Từ khoá: *Sách toán chín chương.*

Vào năm 332 trước Công nguyên, quốc vương Maxeđoan Alexandre đại đế chính phục Ai Cập và đã xây dựng thành phố lớn Alexandria trên cửa sông Nin. Thành phố này phát triển nhanh chóng trở thành trung tâm học thuật quan trọng.

Vào khoảng 300 năm trước Công Nguyên, đông đảo các học giả tập hợp tại Alexandre, trong số đó có Euclide. Bấy giờ ông đã lập một trường học dạy toán tại Alexandria. Người ta biết rất ít về cuộc sống của Euclide trong thời gian trước khi ông đến Alexandria. Hình như ông đã tiếp thu học vấn từ nhà hiền triết Platon. Euclide có ảnh hưởng sâu rộng trong toán học. Mãi cho đến ngày nay, tên tuổi của Euclide vẫn được các nhà toán học nhắc đến thường xuyên.

Danh tiếng của Euclide rất hiển hách chủ yếu do tác phẩm "Nguyên lí" của ông. Tác phẩm "Nguyên lí" là một bộ sách đồ sộ, toàn bộ sách có 15 quyển đề cập đến hình học phẳng, hình học không gian và phần lớn nội dung của lí thuyết về số. Tuy nhiên trong số nhiều định lí chỉ có một phần là kết quả của Euclide. Nhưng công lao lớn nhất của Euclide là ông đã đưa ra các tiên đề và các dẫn giải về các tiên đề đó. Ông đã thành công trong việc biến các lí luận toán học tản mạn, từ các cơ sở giả định thành các kết luận chặt chẽ. Ngày nay phương pháp tiên đề được ứng dụng rộng rãi trong nhiều ngành toán học hiện đại như topo, đại số trừu tượng. Trong các lĩnh vực toán học này, trước tiên người ta đưa ra tiên đề, sau đó diễn giải các tiên đề để đi đến xây dựng các lí thuyết tuyệt đẹp.

Tác phẩm "Nguyên lí" có ảnh hưởng sâu sắc đối với nền tư tưởng phương Tây. Từ thế hệ này đến thế hệ khác, từ thế kỉ này đến thế kỉ khác người ta đã nghiên cứu, phân tích, giải thích nội dung của sách mãi cho đến ngày nay. Có người cho rằng nền văn minh Châu Âu chỉ có "Kinh thánh" mới sánh được với " Nguyên lí".

Tác phẩm "Nguyên lí" được đưa vào Trung Quốc do nhà khoa học Từ Quang Khải vào cuối đời nhà Minh. Từ Quang Khải (1562 - 1633) tự là Tử Quang, người thuộc khu Ngô Tùng thành phố Thượng Hải. Khoảng triều vua Vạn Lịch nhà Minh năm 1597 đỗ cử nhân, đỗ tiến sĩ năm 1604. Trong triều vua Sùng Trinh đã qua các chức quan Thượng thư bộ Lễ, Hàn Lâm viện học sĩ, Đông các học sĩ, cuối cùng đến năm 1632 là Văn các Đại học sĩ. Ông có các cống hiến to lớn trong việc tăng cường quốc phòng, phát triển nông nghiệp, chấn hưng thuỷ lợi, cải tiến lịch pháp. Ông đã không tiếc sức du nhập toán học và lịch pháp Tây phương vào Trung Quốc. Khi ông đã quen biết nhà truyền giáo Italia Limadou, ông quyết định phiên dịch các tác phẩm khoa học phương Tây. Limadou chủ trương trước hết dịch các tác phẩm về lịch pháp, thiên văn cho nhà vua thưởng thức. Nhưng Từ Quang Khải vẫn kiên trì thứ tự theo logic trước hết phải dịch "Nguyên lí". Từ Quang Khải và Limadou đặt tên cho bản dịch "Nguyên lí" ra Trung văn là "Nguyên lí hình học". Đến năm 1606 đã dịch xong 6 quyển, đến năm 1607 in và phát hành tại Bắc Kinh.

Cùng với việc phiên dịch, Từ Quang Khải đã bình giải và giới thiệu tác phẩm "Nguyên lí hình học". Trong tác phẩm "Nguyên lí hình học giảng giải" ông đã nói "đối với quyển sách này cần có bốn không: không nghi ngờ, không dấu giếm, không thử nghiệm, không thay đổi, hoàn toàn tuyệt đối chính xác". Do "tính lôgic" của "Nguyên lí hình học" rất chặt chẽ nên Từ Quang Khải còn nói: Sách này có bốn cái không thể được tức là bốn cái không thể: Không thể bỏ sót một chữ, không thể có sai lầm, không thể bỏ đi một đoạn, không thể đảo lộn thứ tự trước sau. Những lời bình luận như thế về hình học ở Trung Quốc cách đây 400 năm thực là điều không dễ dàng.

Cống hiến của Từ Quang Khải và Limadou trong bản dịch "Nguyên lí hình học" là hết sức vĩ đại khi đã định ra nội dung khoa học "Hình học của Nguyên lí", dịch đúng thuật ngữ "Hình học" cho tác phẩm. "Hình học" là dịch từ thuật ngữ "Geometrie". Trong bản dịch, Từ Quang Khải và Limadou dịch "geo" thành "kỉ hà" là hình học để dịch geometrie quả là chính xác, thần tình. Trong kỉ hà học các thuật ngữ điểm, đường, đường thẳng, đường song song, góc, tam giác, hình bốn cạnh đều được dịch ra từ nguyên bản. Tất cả các thuật ngữ này được lưu truyền đến ngày nay ở các nước

phương Đông như Nhật Bản, Việt Nam v.v... và có ảnh hưởng sâu xa.

Từ Quang Khải yêu cầu dịch toàn bộ “Nguyên lí hình học” nhưng Limadou cho rằng thế là đủ và đã dừng lại. Do đó 9 quyển sách cuối của “Nguyên lí hình học” mãi hơn 200 năm sau mới được dịch ra. Do nhà toán học nhà Thanh là Lý Thiện Lan và người Anh là Wilia hợp tác hoàn thành. Lý Thiện Lan (1811-1882) tự Nhâm Thúc, hiệu Thu Nhẫn, người Hải Ninh tỉnh Triết Giang, ngay từ nhỏ đã yêu thích toán học. Năm 1852, sau khi đến Thượng Hải, Lý Thiện Lan đã cùng với Wilia tiếp tục hoàn thành sự nghiệp của Từ Quang Khải và Limadou. Đến năm 1856 đã hoàn thành mọi công việc. Bấy giờ tác phẩm vĩ đại của Euclide đã được du nhập đầy đủ vào Trung Quốc, có tác dụng quan trọng đối với sự phát triển toán học về sau này của Trung Quốc.

Ngoài việc dịch “Nguyên lí hình học” Lý Thiện Lan còn phiên dịch “Đại số học” có 13 quyển. “Lượm lặt về Đại số, vi phân, tích phân” có 18 quyển và “Bàn về trời” có 18 quyển. Hợp tác với người khác để dịch “Học thuyết về trọng lực” 20 quyển và “Đường elip” có ba quyển, cùng một lượng lớn tác phẩm toán học khác. Nhiều thuật ngữ toán học như vi phân, tích phân đều do ông đặt ra.

Từ Quang Khải trong tác phẩm bình luận “Nguyên lí hình học” đã từng nói “Quyển sách sẽ giúp ích cho người đọc loại bỏ tính khí xốc nổi, rèn luyện tĩnh tâm, người đọc sẽ tìm được cách ổn định, suy nghĩ khéo léo nên không ai không thể không học”. Ý nói là đọc “Nguyên lí hình học” giúp người ta trừ bỏ tính xốc nổi, luyện được tập quán tĩnh tâm, theo một phương pháp nhất định để bồi dưỡng sự khéo léo về suy nghĩ. Vì vậy mọi người trên toàn thế giới nên học hình học.

Hiện nay ta đang bước vào thế kỉ XXI, như lời Từ Quang Khải đã nói, mọi người trên toàn thế giới đều thấy hoặc ít hoặc nhiều cần phải học tập hình học.

Từ khoá: *"Nguyên lí"; Euclide; "Nguyên lí hình học"; Từ Quang Khải; Lí Thiện Lan".*

Sự giao lưu văn hóa giữa hai nước Trung Nhật có nguồn gốc từ dài lâu. Toán học ở Nhật Bản được gọi là *wasan*, trước đây toàn học từ các điển tịch toán học của Trung Quốc cổ đại, đồng thời không ngừng phát triển những mặt mạnh của mình. Các sách Kỉ hà nguyên bản (năm 1607) do Từ Quang Khải và Matteo Ricci dịch và Đại vi tích thập cấp (năm 1859) do Lý Thiện Lan và Alexander Wylie dịch luôn là những điển tịch chủ yếu để Nhật Bản tìm hiểu về toán học Phương Tây. Cho đến những năm 70 của thế kỉ 19, Nhật Bản vẫn còn cử người đến Trung Quốc thu thập các thư tịch toán học Trung Quốc để tham khảo.

Nhưng từ năm 1868, sau thời Duy Tân Minh Trị của Nhật Bản, chính phủ Nhật Bản một mặt học kĩ thuật của Phương Tây để phát triển công nghiệp, mặt khác về trong giáo dục chủ trương phế bỏ toán Tàu, chuyên dùng toán Tây, phổ cập toán học Phương Tây. Đồng thời, liên tục cử người đến Anh, Đức chuyên học về toán, để khi về nước tăng cường giảng dạy toán học Phương Tây. Những biện pháp này khiến cho trình độ toán học của Nhật Bản nâng cao nhanh chóng.

Nhìn lại Trung Quốc, chủ trương Trung học vi thể, Tây học vi dụng nhấn mạnh dùng Tứ thư Ngũ kinh của Trung Quốc là chính, còn khoa học kĩ thuật của Phương Tây, bao gồm cả toán học, thì chỉ lấy về để dùng. Không hề có ý định xếp toán học vào môn học chính trong trường, lại càng chưa có ý thức phải dùng toán học để dạy thanh thiếu niên. Vì thế, tinh thần khoa học khi ấy không được đề cao, toán học Phương Tây cũng không được phổ cập. Mặt khác, rất nhiều trí thức còn cho rằng hình học, đại số của Phương Tây, Trung Quốc đã có từ thời cổ xưa, nên đã không bỏ công sức học tập và nghiên cứu. Chính thái độ giậm chân tại chỗ này đã khiến cho toán học Trung Quốc kể từ sau năm 1870 đã không tiến lên được. Kết quả là sau khi Chiến tranh Giáp Ngọ năm 1894 thất bại, Trung Quốc lại phải quay ngược trở lại học toán từ Nhật Bản, đã liên tục cử lưu học sinh tới Nhật Bản. Chỉ trong vòng 20 năm, thực lực toán học giữa hai nước Trung Nhật đã phát sinh sự

nghịch chuyển, đây là một bài học lịch sử đau đớn.

Vì thế, với tất cả những thứ gì là tiên tiến của nước ngoài, chỉ cần hữu dụng đối với Trung Quốc là nên thực hành chủ nghĩa cầm về, mạnh dạn đưa vào, rồi qua hấp thụ tiêu hóa mà cuối cùng hình thành nên bản sắc của mình, để vượt lên tiền nhân.

Tiến sĩ toán đầu tiên của Trung Quốc thời hiện đại tên là Hồ Minh Phục, ông sinh vào tháng 5 năm 1891 tại Vô Tích, tỉnh Giang Tô. Năm 14 tuổi, ông thi đỗ vào Thượng Hải Thương nghiệp Học hiệu, sau đó học tiếp lên Nam Kinh Cao đẳng Thương nghiệp học đường với thành tích xuất sắc. Năm 19 tuổi, ông trúng tuyển là lưu học sinh thế hệ hai ở Mĩ theo Chương trình Boxer Health, theo học chương trình toán lí ở Đại học Cornell. Năm 25 tuổi, ông vào học chuyên về toán ở Viện nghiên cứu sinh Trường Đại học Harvard danh tiếng. Năm 26 tuổi, luận văn tiến sĩ Phương trình tích phân-vi phân tuyến tính có điều kiện biên của ông được thông qua, ông được trao học vị tiến sĩ và trở thành tiến sĩ đầu tiên trong số lưu học sinh Trung Quốc ở trường này, đồng thời cũng trở thành tiến sĩ toán học đầu tiên của Trung Quốc thời hiện đại. Bản luận án tiến sĩ của ông đã được công bố trên Transactions of American Mathematical Society, dây cũng là bản luận văn đầu tiên về toán học hiện đại của Trung Quốc.

Hồ Minh Phục là một chí sĩ biết nhìn xa. Ngay từ năm 1915,ông đã cùng với các lưu học sinh khác sáng lập tờ tạp chí Khoa học với mục đích truyền bá khoa học và kiến thức mới nhất của thế giới, đồng thời tích cực viết bài, chỉ trong 3 số đầu mà ông đã có tới 47 bài. Tháng 10 cùng năm, ông còn phụ trách việc mở Trung Quốc khoa học xã. Sau khi về nước vào năm 1918, ông vừa làm chủ nhiệm khoa toán ở Đại học Đại Đồng, lại vừa chủ trì biên tập tạp chí Khoa học và công việc ở Trung Quốc khoa học xã, đã tận tụy hết lòng với nền khoa học và giáo dục nước nhà. Năm 1927, ông không may bị chết đuối trong một lần đi bơi, khi mới chỉ 36 tuổi.

Để tưởng niệm Hồi Minh Phục, năm 1929, Trung Quốc khoa học xã đã cho xây một thư viện có tên Hồ Minh Phục đồ thư quán ở số 235 đường Thiểm Tây Nam, Thượng Hải. Hồ Minh Phục đồ thư quán về sau từng có một dạo bị đổi tên, đến năm 1998 theo kiến nghị của các viện sĩ như Đàm Gia Trinh..., tên cũ đã được phục hồi, Viện sĩ Chu Quang Triệu đích thân gỡ biển cũ. Tháng 5 năm 1999, Đài truyền hình trung ương đã tiến hành quay và phát sóng bộ phim chuyên đề Đến với khoa học, để ôn lại cuộc đời của ông.

Từ khóa: *Hồ Minh Phục.*

Sự thật lịch sử chứng minh rằng nếu nước nhà hùng mạnh, kinh tế phát triển, thế nước phồn vinh, tất nhiên trình độ toán học sẽ theo đó mà phát triển cao.

Vào thế kỉ XVII, ở nước Anh đã tiến hành cuộc cách mạng về sản xuất, Newton đã có những cống hiến có tính chất cách mạng trong toán học và cơ học. Nền sản xuất lớn tư bản chủ nghĩa đã khiến chính quyền Napoleon mười phần lớn mạnh, bấy giờ trung tâm toán học thế giới di chuyển đến nước Pháp. Vào nửa sau thế kỉ XIX, nước Đức đã vượt lên, trình độ sản xuất hơn nước Pháp, trong giới toán học cũng đã xuất hiện các nhà toán học kiệt xuất như Gauss, thực lực toán học dần dần vượt hơn nước Pháp. Vào đầu thế kỉ XX, nền kinh tế nước Mỹ phát triển hết sức nhanh, vì vậy từ năm 1930 toán học nước Mỹ đã dẫn đầu thế giới, Viện nghiên cứu toán học Princeton trở thành trung tâm toán học thế giới. Bên cạnh đó Liên Xô trước đây vào giữa thế kỉ XX, đã trở thành một siêu cường, trình độ toán học của Trường Đại học Matxcơva đã sánh ngang hàng với Viện

Princeton của nước Mỹ.

Trong thời kì chiến tranh lạnh tình hình, toán học thế giới là do Liên Xô và Mỹ dẫn đầu, các nước Tây Âu tiếp sau đó và Nhật Bản thì cố gắng đuổi theo.



Toán học là cơ sở cho khoa học phát triển. Kinh tế phát triển, khoa học kĩ thuật tiến bộ sẽ đưa ra cho toán học nhiều vấn đề trọng đại, khuyến khích các nhà toán học sáng tạo.

Nhiều vấn đề trọng yếu trong quốc phòng cũng cần nhờ sự giúp đỡ của toán học. Người ta thường vẫn nói, trong thời đại công nghệ thông tin, nhiều vấn đề khoa học kĩ thuật cao cấp suy đến cùng cũng là một loại kĩ thuật toán học.

Trung Quốc cũng là một nước có truyền thống toán học ưu tú. Tuỳ sự lớn mạnh của quốc gia, trình độ toán học cũng được nâng cao nhanh chóng. Các nhà toán học Trung Quốc đã tham gia nghiên cứu chế tạo bom nguyên tử, bom khinh khí, vệ tinh nhân tạo và có nhiều cống hiến quan trọng. Việc nghiên cứu toán học thuần tuý ở Trung Quốc cũng theo đó mà có những bước tiến lớn. Những nghiên cứu về các phân ngành toán khác đã có những thành quả ngang tầm tiên tiến của thế giới. Nhưng nói một cách toàn diện thì trình độ toán học của Trung Quốc còn chưa đạt trình độ loại một của thế giới.

Từ khoá: *Toán học.*

Nếu đặt câu hỏi vì sao phải học toán? Nhiều bạn trẻ sẽ trả lời "vì điểm toán được đánh giá cao trong các kì thi". Nhưng mục đích thực của việc học toán không phải nhằm để đối phó với thi cử mà là để có thể vận dụng toán học để giải quyết nhiều vấn đề quan trọng trong sinh hoạt xã hội, trong các hoạt động sản xuất sau này. Nội dung của môn toán ở các chương trình học sinh trung học, tiểu học rất cơ bản. Ví dụ như các phép cộng, trừ, nhân, chia là những phép tính rất quen thuộc có thể được sử dụng trong nhiều lĩnh vực, hoạt động thực tiễn. Khi mua đồ đạc, đến ngân hàng nhận tiền lãi, đo đất đai, làm các thiết kế đều không thể không sử dụng đến toán học.

Các nội dung toán học khác cũng giống như vậy? Ví dụ vào 300 năm trước Công nguyên, nhà toán học Hy Lạp Apdonius nghiên cứu đường elip. Bấy giờ người ta chưa biết dùng để làm gì? Mãi đến thế kỉ XVI - XVII khi Kêple nghiên cứu chuyển động của các hành tinh, phát hiện thấy quỹ đạo chuyển động của Trái Đất quanh Mặt Trời là một đường elip, từ đó đường ellip mới được chú ý nghiên cứu, sử dụng. Do đó từ khi nghiên cứu đến sử dụng phải đến gần 2000 năm!

Lí thuyết về số của Hoa La Canh và Trần Cảnh Uyên nghiên cứu, trước đây ít được sử dụng, về sau mới thấy lí thuyết này liên quan chặt chẽ đến "khoa học mật mã". Mỗi quốc gia khi phát tin có nhiều tin tức cơ mật cần truyền đi, đặc biệt là tin tức về quân sự trong chiến tranh. Trong Đại chiến thế giới thứ II, người Anh đã dựa vào việc phân tích các mật mã của Đức nên đã đánh đắm nhiều tàu ngầm của phát xít Đức. Vào thời đó người Mỹ cũng dựa vào việc dịch được các mật mã của Nhật, nên đã bắn hạ máy bay của đại tướng Iamaken đang âm mưu xây dựng lại hạm đội Thái Bình Dương.

Toán học là khoa học nghiên cứu số và hình học. Tất cả cái gì có liên quan đến "độ to nhỏ" và, vị trí hình dáng đều có liên quan đến toán học. Từ những ví dụ nêu trên ta thấy có những vấn đề toán học hoàn toàn là toán học thuần tuý vì nó rất trừu tượng nên làm cho người ta không biết sẽ sử dụng chúng vào đâu. Vì vậy chúng ta không nên sợ môn toán, cũng không nên dè bỉu toán học. Toán học giống như một con chó nhỏ, nếu bạn dè bỉu nó, nó sẽ nhằm vào bạn mà sủa, và có thể nó còn cắn bạn một miếng. Bạn phải gần gũi nó, ham thích nó, nó sẽ là người bạn trung thực của bạn, giúp bạn vượt qua gian nan hiểm trở, đến bên bờ khoa học, giúp cho bạn được nhiều điều.

Từ khoá: *Toán học.*

161. Vì sao vận trù học lại được sinh ra trên chiến trường?

Vào thời gian Chiến tranh Thế giới thứ hai, bọn phát xít muốn đánh gục nước Anh đã phái một đội máy bay chiến đấu hùng hậu đánh phá ba hòn đảo của nước Anh.

Bấy giờ nước Anh và đã phát minh ra các thiết bị ra-đa đã dự đoán kịp thời sự xâm phạm của máy bay địch. Các nhà chức trách quân sự của Anh nhận thức được rằng, thiết bị tiên tiến là rất cần, nhưng thiết bị còn phải dựa vào người quản lí. Nếu có sách lược đúng, quản lí tốt thì hiệu năng của thiết bị được đề cao hơn. Do vậy họ đã mời nhiều nhà khoa học thành lập một tổ vận trù. Thông qua các phân tích toán học và cách tính toán để giúp cho quân đội dùng ra-đa xác định vị trí của máy bay địch.

Dưới sự hiệp đồng của nhóm vận trù học, không quân Anh đã đánh lùi hết đợt máy bay này đến đợt máy bay khác cũng như đã bắn rơi nhiều máy bay của Đức, làm cơ sở cho chiến thắng cuối cùng của cuộc chiến tranh chống phát xít Đức.



Về sau ở nhiều nước như Anh, Mỹ, Canađa khi phối hợp các loại binh chủng chủ yếu vận dụng các tổ vận trù. Vận trù học giúp cho việc khống chế hoả lực khi dã ngoại, tổ chức vận chuyển quân sự, các sách lược chống tàu ngầm, nghiên cứu việc phát hiện bom mìn, ngư lôi. Vận trù học cũng giúp cho việc phân phối một cách tối ưu các tân binh và đã thu được các hiệu quả tốt đẹp, có nhiều ứng dụng tốt trong thực tế chiến trường. Ví dụ trong một lần tác chiến bắn chìm hạm tàu của Nhật tại hải phận Tân Ghinê (New Guinea), Anh đã vận dụng thành công các nghiên cứu của nhóm vận trù.

Trong thời gian Chiến tranh Thế giới thứ hai người ta đã vận dụng lượng hữu hạn nhân lực, vật lực, tận dụng được khả năng của thiết bị là nhờ sự phát triển của ngành toán vận trù học. Do vận trù học được sử dụng sớm nhất trong Chiến tranh Thế giới thứ hai nên có thể nói vận trù học đã được sinh ra từ chiến trường. Sau chiến tranh, vận trù học được sử dụng rất rộng rãi, được ứng dụng trong sản xuất, hoạch định chính sách, quyết sách quản lí. Trước mắt vận trù học là một ngành toán học vừa có tính học thuật vừa có tính ứng dụng.

Từ khoá: *Vận trù học.*

162. Sao Hải vương được phát hiện nhờ toán học như thế nào?

Có chín hành tinh lớn trong hệ Mặt Trời. Hầu như việc phát hiện mỗi hành tinh đều gợi sự chú ý đặc biệt của mọi người.

Ngay từ thời cổ đại, người ta đã dựa vào mắt thường để phát hiện các hành tinh: Sao Hoả, Sao Kim, Sao Mộc, Sao Thổ, Sao Thuỷ. Vào năm 1781, nhà thiên văn chuyên nghiên cứu các hành tinh của nước Anh là Wiliam Hershel nhờ một kính viễn vọng có độ phóng đại lớn tự chế tạo đã quan sát hệ Mặt Trời và tìm thấy một hành tinh mới đó là sao Thiên vương. Sau khi phát hiện Thiên vương tinh là sự phát hiện sao Hải vương.

Điều rất thú vị là việc phát hiện sao Hải vương không phải qua quan trắc mà do hai nhà thiên văn dùng “phương pháp toán học” tính ra được.

Khi Hershel dùng kính viễn vọng ngẫu nhiên phát hiện được sao Thiên vương đã đem lại nhiều lo lắng cho các nhà thiên văn hơn là vui mừng, bởi vì hành tinh này thường xuyên vượt ra ngoài quỹ đạo. Sao “Thiên vương” như anh chàng say rượu, luôn lảo đảo, chao đảo trên đường đi.

Vào năm 1845, nhà thiên văn Pháp Le Verrier nghe được thông tin này, dựa vào các tư liệu thu thập được, và các số liệu quan trắc, ông đã lập được chín phương trình và đến ngày 31-8-1846 tính ra quỹ đạo của một hành tinh chưa biết cũng như tính toán sẵn vị trí mà hành tinh đó sẽ xuất hiện. Kết luận này được trưởng đài thiên văn Berlin là Gale chú ý và về sau chính Gale đã phát hiện sao Hải vương.



Song người tính ra “Hải vương tinh” sớm nhất không phải là Leverier mà là nhà thiên văn người Anh A đem thực hiện vào ngày 10.9.1845 và đã gửi các báo cáo đến cho một giáo sư ở đài thiên văn Cambridge, nhờ họ quan trắc và tìm hành tinh bí mật nọ.

Có thể bấy giờ Ađem vẫn còn là người chưa có tiếng tăm gì trong giới thiên văn nên các ý kiến của anh thanh niên 20 tuổi này chưa được chú ý.

Về sau các nhà thiên văn ở Anh và Pháp tranh nhau quyền phát hiện sao Hải vương, nhưng Gale và Ađem đã đứng ngoài cuộc tranh chấp và họ trở thành đôi bạn thân.

Việc dùng toán học chứng minh sự tồn tại của sao Hải vương đã chứng minh uy lực mạnh mẽ của toán học.

Từ khoá: *Phương pháp toán học; Sao Hải Vương.*

163. Vì sao Hi Lạp cổ đại lại đạt được thành tựu toán học hết sức rực rỡ?

Nói đến toán học cổ đại là phải nhắc đến Hi Lạp cổ đại. Bộ sách Kỉ hà nguyên bản (Anh: “Euclid's Elements) đã được ra đời ở Hi Lạp cổ đại. Công trình lớn được giới toán học đánh giá cao suốt hơn 2000 năm qua đã trở thành cha đẻ của môn hình học một cách không có gì. Ngoài ra, nó còn khiến cho số học được tách ra khỏi hình học để trở thành bộ môn khoa học độc lập, đồng thời giải quyết được một lượng lớn những vấn đề về phương trình đại số, bộ môn toán học cao cấp cũng đã bắt đầu được manh nha.

Tuy có thể chứng thực được những luận đoán này bằng các thực nghiệm gấp giấy đơn giản, nhưng người ta vẫn mong muốn có được những luận chứng logic hơn. Cứ như vậy mà nền toán học Hi Lạp cổ đại đã được phát triển hoàn toàn mới trên một hệ thống logic, từ đó đã thúc đẩy sự tiến triển to lớn của môn hình học.

Thứ hai, sự phát triển của bất cứ môn khoa học nào cũng không thể tách rời được với sự giao lưu. Toán học Hi Lạp cổ đại cũng đã thu hút được những mặt mạnh của người khác, rồi từ đó mà có được sự tiến bộ và sáng tạo. Talet được coi là thủy tổ của môn hình học Hi Lạp là người từng sinh sống và học tập ở Ai Cập. Khi trở về quê hương, ông cho xây dựng trường học để truyền dạy môn toán học mình đem về và các kiến thức khoa học khác. Ông cùng một vài học sinh của mình đã nhanh chóng vượt lên trên trình độ của Ai Cập, đóng vai trò thúc đẩy cực lớn trong sự phát triển nền toán học của Hi Lạp.



Thứ ba, nền sản xuất và thực tế của xã hội xưa nay đều là động lực chủ yếu của sự phát triển khoa học. Hi Lạp cổ đại khi ấy đã có được quốc lực tương đối hùng hậu và nền khoa học kĩ thuật khá tiên tiến, sự phát triển về hàng hải và thương nghiệp cũng liên tục đưa ra những chủ đề nghiên cứu mới cho toán học, còn toán học lại cũng đạt được sự phát triển mới nhờ không ngừng được ứng dụng.

Sự đạt được những thành tựu toán học của Hi Lạp cổ đại không thể tách rời yếu tố con người. Việc giải quyết rất nhiều vấn đề toán học thường là tâm huyết của cả mấy thế hệ, bước tiến triển mang tính đột phá cuối cùng thường là do một hoặc một vài người hoàn thành. Ở trung tâm văn hóa khoa học của Hi Lạp cổ đại Bác học viện Alexander, tập trung đông đảo những nhân tài kiệt xuất, tạo tiềnđề cần thiết cho bước đột phá toán học. Các nhà toán học mãi mãi được ghi danh trong sử sách như Pythagoras, Hippocrates, Helen, Diophantine... đều là những người đạt nền móng cho thành tựu toán học của Hi Lạp cổ đại.

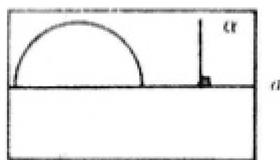
Ở Trung Quốc ngày nay, sự phát triển của khoa học kĩ thuật đã đặt ra những yêu cầu mới đối với toán học, tạo cơ hội tốt cho sự học tập và phát triển nhằm tăng cường mở cửa với bên ngoài và tổng hợp tiềm năng đất nước. Việc có thể tạo ra được vẻ rực rỡ cho nền toán học Trung Quốc được hay không là nằm ở sự tìm tòi và nỗ lực của mỗi một người.

Từ khóa: *Hy Lạp cổ đại; Toán học.*

164. Vì sao lại sinh ra hình học phi Euclide?

Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng có thể vẽ vô số đường thẳng không cắt nhau. Các bạn có tin không? Cho dù đây là mệnh đề mâu thuẫn với các giáo trình toán học ở bậc trung học, song đó là một loại hình học khác, hình học phi Euclide.

Từ xưa đến nay người ta cho rằng từ một điểm ở ngoài đường thẳng ℓ ta chỉ có thể vẽ một đường thẳng song song với đường thẳng đó và chỉ một mà thôi. Đó là mệnh đề do Euclide, nhà toán học cổ Hy Lạp, đã phát biểu trong sách “Nguyên lí hình học” của ông. Năm 1826, Lobasevski đã đưa ra một môn hình học mới, trong có một định đề gọi là Định đề phi Euclide: Qua một điểm ở ngoài một đường thẳng ít nhất có thể vẽ hai đường thẳng không cắt đường thẳng đó. Định đề này kết hợp với các định đề Euclide khác, phát triển thành hình học phi Euclide. Đó là một loại hình học có quy mô giống như hình học Euclide và chưa phát hiện ra hệ thống hình học mới nào có mâu thuân bởi chính chúng ta có thể dùng một mô hình để giải thích hình học Lobasevski. Hình phẳng trong hình học Lobasevski cũng giống hình phẳng trong hình học thường, định nghĩa về điểm trong hai môn hình học cũng hoàn toàn giống nhau. Như trên hình 1, với một hình phẳng α ta có thể dùng một đường thẳng *a* chia hình đó làm hai phần bằng nhau. Một đường tròn có tâm *a* trên đường thẳng sẽ nhận đường thẳng làm đường kính là chung cho cả hai loại hình học. Như ở hình 2 ta chọn một đường thẳng *AB* trong hình học Lobasevski, và chọn tuỳ ý một điểm P, ta có thể vẽ nhiều đường thẳng không cắt *AB*. Bởi vì với vòng tròn có tâm trên *a*, qua điểm P ta có thể vẽ nhiều nửa đường tròn không cắt nửa vòng tròn đường kính *AB*.





Từ khi xuất hiện hình học Lobasevski, đã xuất hiện nhiều loại hình học mới như hình học Rieman là một loại hình học phi Euclide. Hình học phi Euclide và hình học Euclide phản ánh một tồn tại khách quan, chỉ có điều là phản ánh hiện thực khách quan không ở trong cùng một phạm vi. Ví dụ Einstin trong học thuyết tương đối rộng đã dùng hình học Rieman làm không gian vật lí. Đương nhiên là trong cuộc sống hàng ngày chúng ta toàn dùng hình học Euclide.

Từ khoá:*Hình học Euclide; Hình học phi Euclide.*

165. Thế nào là dự đoán Goldbach?

Vào ngày 7-6-1742, nhà toán học Đức Goldbach đã gửi cho giáo sư Euler một dự đoán "Bất kì một số lẻ nào lớn hơn 5 đều là tổng của 3 số nguyên tố". Ngày 30-6 năm đó, Euler đã viết thư trả lời Goldbach cho rằng dự đoán là chính xác và đưa ra một dự đoán "Bất kì một số chẵn nào lớn hơn hai đều là tổng của hai số nguyên tố", nhưng bấy giờ họ đã không chứng minh được các mệnh đề đó.

Hai vấn đề này đã lôi cuốn sự hứng thú của đông đảo các nhà toán học, đó chính là "dự đoán Goldbach" nổi tiếng. Từ đó đã bắt đầu một công cuộc chứng minh gian nan "dự đoán Goldbach".



Do dự đoán Goldbach một thời gian dài chưa được chứng minh nên tại Hội nghị quốc tế toán học năm 1912 đưa ra một dự đoán yếu ớt hơn: Tồn tại một số nguyên C để cho một số nguyên lớn hơn hoặc bằng 2 sẽ được biểu diễn bằng tổng hai số nguyên tố không lớn hơn C.

Năm 1930, nhà toán học Liên Xô 25 tuổi là Sineyrilman đã đưa ra chứng minh cho mệnh đề C. Ông còn đưa ra mệnh đề với điều kiện C không lớn hơn S, S ≤ 800.000. Sau này S được gọi là số Sineyrilman. Đây là bước đột phá trong quá trình chứng minh dự đoán Goldbach.

Năm 1937, nhà toán học Liên Xô Vinogradov đã dùng phương pháp "viên chu" và phương pháp do ông sáng tạo là phương pháp phối hợp đã chứng minh rằng: Với một số lẻ đủ lớn đều có thể biểu diễn bằng tổng của ba số nguyên tố lẻ.

Đây lại là bước đột phá lớn nhất để giải quyết dự đoán Goldbach và đó được gọi là định lí ba số nguyên tố.

Trong quá trình chứng minh dự đoán Goldbach người đã đưa ra mệnh đề, với một số chẵn đủ lớn, ta có thể biểu diễn bằng các nhân tử và không vượt quá tổng các nhân tử là *m* và *n* nhân với hai số nào đó.

Mệnh đề này được ghi là " $m + n$". Ví dụ "3 + 4" là phải chứng minh với số chẵn đủ lớn thì có thể biểu diễn bằng tổng các nhân tử là 3, nhân với một số và 4 nhân với một số khác. Còn "1 + 1" có nghĩa với số chẵn đủ lớn thì có thể biểu diễn bằng tổng hai số nguyên tố. Nếu chứng minh được "1 + 1" thì trên cơ bản là chứng minh được dự đoán Goldbach "Định lí ba số nguyên tố" chỉ là loại suy đoán quan trọng từ dự đoán Goldbach.

Năm 1920, nhà toán học Na Uy đã cải tiến "phương pháp rây" chứng minh được " 9 + 9". Năm 1924, nhà toán học Đức Radama chứng minh " 7 + 7". Năm 1932, nhà toán học Anh Eistman đã chứng minh "6 + 6". Về sau, năm 1938 và năm 1940, Buhaxitabov đã chứng minh "5 + 5" và "4 + 4". Vào năm 1956, nhà toán học Trung Quốc Vương Nguyên đã chứng minh "3 + 4", nhà toán học

Liên Xô Vinogradov chứng minh “3 + 3”. Năm 1957, Vương Nguyên chứng minh “2 + 3”.

Việc chứng minh có “1” đầu tiên ra đời sớm nhất vào năm 1848 do nhà toán học Hungari Reny thực hiện. Reny đã chứng minh “1 + c”, trong đó c là hằng số rất lớn. Năm 1962, nhà toán học Trung Quốc Phan Thừa Động chứng minh “1 + 5”. Cùng năm đó nhà toán học Liên Xô Barbaen cũng chứng minh được “1 + 5”. Vào năm 1963, Vương Nguyên và Phan Thừa Động, Barbaen cùng lúc chứng minh “1 + 4”. Năm 1965, Vinogradov và Buagaxitabov và nhà toán học Italia Benpini chứng minh được “1 + 3”.

Năm 1966, nhà toán học Trung Quốc Trần Cảnh Nhuận lại một lần nữa cải tiến “phương pháp rây” và đã chứng minh “1 + 2”, nhưng chưa phát biểu rõ ràng các chứng minh của mình nên không có tiếng vang lớn trên thế giới. Vào năm 1973, Trần Cảnh Nhuận lại sửa chữa lại luận văn của mình và phát biểu “một số chẵn lớn đều có thể biểu diễn bằng tổng hai số trong đó có một số nguyên tố còn số kia hoặc là một số nguyên tố hoặc là tích hai số nguyên tố”. Chứng minh của Trần Cảnh Nhuận được gọi là định lí họ Trần. Luận văn của Trần Cảnh Nhuận được giới toán học hưởng ứng nhiệt liệt. Không ít nhà toán học đã cố gắng chứng minh định lí một cách đơn giản hơn. Các chứng minh đơn giản là của các nhà toán học Vương Nguyên, Định Hạ Huề, Phan Thừa Động, cùng các cộng tác viên tiến hành.

Dự đoán Goldbach là dự đoán quan trọng của lí thuyết về số được đưa ra cách đây đã hơn 250 năm, nhưng vẫn còn chưa chứng minh được đến cùng và chưa thành định lí. Qua gần 70 năm nỗ lực, các nhà toán học trên toàn thế giới đã thu được những bước tiến rất lớn và hiện nay người ta đang tiến quân vào “1 + 1”.

Từ khoá: *Số nguyên tố; Dự đoán Goldbach; Định lí ba nguyên tố; Định lí họ Trần.*

166. Thế nào là định lí lớn Ferma?

Chúng ta đều biết phương trình $x^2 + y^2 = z^2$có vô số nghiệm khác không.

Ví dụ bộ ba số gọi là bộ số tam giác thời Trung Quốc cổ đại có cạnh góc vuông là 3, 4, đường huyền là 5 là nghiệm của phương trình $x = 3$; $y = 4$, $z = 5$.

Vấn đề đặt ra là liệu bài toán mở rộng $x^n + y^n = z^n$ khi $n > 2$ có nghiệm khác 0 hay không? Nghiệm khác 0 ý nói cả ba *x, y, z* đều phải khác 0. Nếu không chỉ cần ví dụ $x = 0$ thì $y=z$ có thể nghiệm đúng với bất kì số nguyên nào.

Ferma, nhà toán học Pháp vào thế kỉ XVII đã từng nghiên cứu vấn đề này. Ferma là một luật sư nổi tiếng đồng thời là nhà toán học. Tuy ông chưa hề được học môn toán một cách chính quy nhưng ông có niềm ham thích toán học và có những sáng tạo phi phàm. Ferma có thói quen là khi đọc sách ông thường ghi những nhận xét của mình ở bên lề và các chỗ giấy trắng trong sách. Khi ông qua đời, con ông đã xem lại các bút tích và thư từ của cha để lại và tìm thấy ở một góc trang có ghi “Không thể một số mà khi nâng lên luỹ thừa bậc ba lại bằng tổng luỹ thừa bậc ba của hai số khác. Không có một số mà luỹ thừa bậc bốn lại bằng tổng luỹ thừa bậc bốn của hai số khác. Nói chung không thể tìm được một số mà khi nâng lên luỹ thừa lớn hơn 2 lại bằng tổng luỹ thừa cùng bậc của hai số khác. Tôi đã có một chứng minh đầy đủ và tuyệt đẹp về mệnh đề này nhưng tiếc rằng không đủ chỗ giấy trống để viết ra được”. Như vậy theo cách nói của Ferma thì phương trình $x^n + y^n = z^n$ với $n > 2$ không có nghiệm khác không. Các nhà toán học đương thời đều tin Ferma có thể chứng minh được kết luận này gọi đó là “định lí Ferma lớn”.

Nhiều nhà toán học cẩn thận không hoàn toàn tin cậy vào các ghi chú của Ferma nên họ hết sức tìm hiểu sâu hơn và mong tìm lại được các “chứng minh tuyệt đẹp và đầy đủ của Ferma”. Thế nhưng trải qua 300 năm vấn đề tưởng như đơn giản đã làm điên đảo các nhà toán học kiệt xuất trong đó có cả Euler, Dirichlet, Legendre, v.v... là những người mà tên tuổi của họ đã lừng danh trên các tác phẩm về toán học. Nhưng công sức của họ bỏ ra không phải là vô ích. Năm 1770, Euler

chứng minh với n =3 và n = 4, định lí Ferma là đúng. Năm 1825, Dirichler và Legendre chứng minh với n = 5 thì kết luận chính xác. Năm 1839, Lamay chứng minh kết luận đúng với n = 7. Khomol khi bắt đầu nghiên cứu "số lí tưởng" vào năm 1874 đã chứng minh trừ các số 37, 59 và 67 thì với các số nhỏ hơn 100 kết luận của Ferma là chính xác... Cho đến năm 1976, có người dùng máy tính điện tử chứng minh với n < 125.000 thì định lí Ferma hoàn toàn đúng. Những kết quả vừa nêu đã cổ vũ mọi người, nhưng nếu cứ tiếp tục theo đà này thì "định lí lớn Ferma" vĩnh viễn không có cơ hội trở thành một định lí thực thụ bởi vì n là một số tự nhiên vô cùng vô tận.

Nhưng đến những năm cuối thế kỉ XX vấn đề đã có chuyển biến cơ bản để đến hồi kết thúc. Vào tháng 9-1994 nhà toán học Anh Andrew Wiles đã hoàn toàn chứng minh được định lí Ferma và bước sang thế kỉ XXI định lí Ferma đã trở thành một định lí thực thụ. Con đường mà các nhà toán học hiện đại giải quyết bài toán không giống với con đường của bản thân Ferma, Euler và các nhà toán học kiệt xuất tiền bối khác. Toán học hiện đại đã có nhiều phân ngành (lí luận đường elip, lí thuyết mô hình, lí thuyết biểu diễn Canbi v.v..) phát huy được tác dụng tổng hợp và đưa lí thuyết số học đến chỗ cao siêu nhờ những cống hiến xuất sắc của nhiều nhà toán học. Dù có những cống hiến xuất sắc, nhưng do vấn đề tuổi tác nên Wiles không được Hội nghị Toán học Quốc tế năm 1998 tặng giải thưởng Fields, nhưng đã đặc cách để ông báo cáo chuyên đề trong hội nghị lớn. Vào buổi tối hôm đó, nhiều nhà toán học đã đến hội trường sớm hàng giờ đề nghị ông báo cáo.

Định lí lớn Ferma đã có hồi kết cục. Trong quá trình chứng minh định lí lớn Ferma đã phát sinh nhiều tư tưởng toán học và các thành quả toán học mới, đã thúc đẩy toán học phát triển, điều đó khiến ý nghĩa của định lí Ferma vượt ra khỏi khuôn khổ của một định lí.

Từ khoá: *Định lí lớn Ferma.*

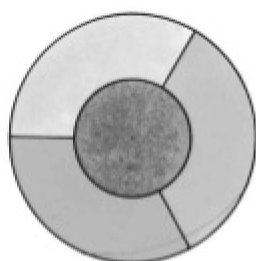
167. Thế nào là bài toán bản đồ có bốn màu?

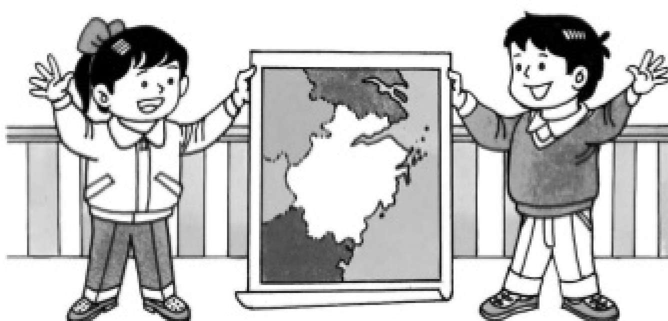
Năm 1852, Côxuri tốt nghiệp đại học ở Luân Đôn. Khi vẽ địa đồ, ông nhận thấy: với một tấm bản đồ chỉ cần dùng tối đa bốn màu là có thể tô đủ để phân biệt được các quốc gia có chung biên giới, tức là màu của các quốc gia có chung biên giới sẽ không giống nhau.

Ông liền đặt ra cho các anh em của ông đang công tác ở trường đại học là liệu có thể chứng minh được điều đó không?

Các anh em của ông liền hỏi nhà toán học Môcan, Môcan thừa nhận là ông ta không thể phán đoán được đúng sai.

Thoạt nhìn, bài toán bốn màu khá đơn giản. Bạn chỉ cần lấy một tấm bản đồ chưa tô màu và chuẩn bị bốn loại màu. Trước hết bạn có thể tô một quốc gia nào đó ví dụ màu đỏ, sau đó bạn tô các quốc gia lân cận bằng các màu khác và theo "nguyên tắc bốn màu" bạn sẽ thấy quốc gia có biên giới chung sẽ có màu khác nhau, không giống nhau.





Quả là việc đó sẽ được thực hiện khá dễ dàng. Tuy nhiên, đó chỉ là sự kiểm chứng mà không phải là chứng minh toán học. Vấn đề bản đồ có bốn màu được đặt ra như một bài toán là một cách phán đoán chung mà không hề chỉ một tấm bản đồ cụ thể nào, là một khái quát cho bất kì một bản đồ nào được vẽ trên giấy. Tấm địa đồ ở đây có thể là tấm địa đồ thực mà cũng có thể là một tấm địa đồ tưởng tượng, thậm chí kể cả những cái mà người ta chưa hề nghĩ đó là bản đồ. Cũng có người nghĩ đến các tấm bản đồ mà không đủ năm màu thì không thể tô được.

Như vậy có thể thấy bản đồ bốn màu tưởng như đơn giản, mà chứng minh thì lại rất khó. Sau này bài toán bản đồ bốn màu cùng với định lí lớn Fecma (Fermat) và bài toán Gôn bach (Goldbach) được xem là ba bài toán khó lớn của thời cận đại.

Năm 1879, Kenpu tuyên bố đã chứng minh được bài toán bốn màu. Mười một năm sau, nhà toán học Haut (Hawood) chỉ ra rằng, cách chứng minh của Kenpu có chỗ không chặt chẽ, nên cách chứng minh đương nhiên không được chấp nhận. Haut đã ứng dụng phương pháp của Kenpu và chứng minh được rằng, cần có năm màu thì có thể tô được bản đồ thế giới để cho các quốc gia có biên giới chung không bị trùng màu. Bài toán này có tên là “bài toán năm màu”.

Từ đầu thế kỉ XX trở lại đây, nhiều nhà toán học đã đi theo con đường của Kenpu để nghiên cứu giải bài toán bốn màu và đã thu được nhiều thành tựu. Người ta chứng minh là để giải bài toán này ta không chỉ nghĩ đến một tấm bản đồ đã vẽ sẵn mà phải nghĩ để vẽ ra vô số tấm bản đồ. Để kiểm nghiệm số lớn bản đồ như vậy quả là một việc có khối lượng lớn quá sức người và khó thực hiện được.

Vào năm 1970 đã có phương án dùng máy tính điện tử để giải bài toán này, và người ta đã phải tính toán 11 năm liên tục mới tìm được kết luận.

Sau năm 1970, nhiều người đã cải tiến phương án giải bài toán bốn màu kết hợp với sự tăng nhanh tốc độ tính của máy điện toán đã mở ra khả năng giải được bài toán bốn màu bằng máy tính.

Vào năm 1976, hai nhà toán học Hoa Kì là Apin (Apeil) và Hakan (Hakan) đã dùng ba máy điện toán khác nhau và đã dùng đến 1200 giờ để hoàn chỉnh việc chứng minh định lí về bài toán bốn màu.

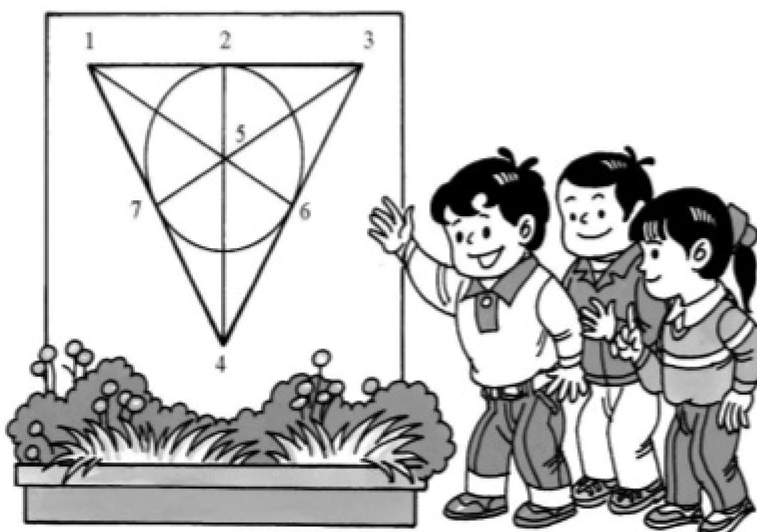
Bài toán bốn màu từ khi đặt ra cho đến khi phát triển thành định lí đã trải qua 120 năm làm

việc liên tục của nhiều thế hệ các nhà toán học mới được hoàn thành. Cho đến ngày nay, nhiều nhà khoa học vẫn đang tìm kiếm lời giải bằng tính toán trên mặt giấy.

Từ khoá: *Bản đồ bốn màu; Bài toán bốn màu; Định lí bốn màu.*

168. Thế nào là bài toán "Nữ sinh Cachơman"?

Năm 1850, Cachơman người Anh đã đưa ra một bài toán khá lí thú: Một bà xơ dẫn 15 nữ sinh hàng ngày xếp hàng dạo chơi.



Bà chia các học sinh làm năm tổ, mỗi tổ có ba nữ sinh theo bà đi dạo. Bà không muốn ngày nào cũng đi dạo với cùng một nhóm ba nữ sinh cố định mà mỗi ngày với một tổ để cho mỗi nữ sinh trong suốt mỗi tuần lễ đều có cơ hội tiếp xúc với bà. Đó chính là bài toán "các nữ sinh cachơman".

Vào năm sau, Cachơman đã công bố trên tạp chí đáp án của ông về bài toán. Trước hết ông đánh số các nữ sinh từ 1 đến 15, cách sắp xếp các đội trong một tuần sẽ như sau:

Chủ nhật	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy
1 2 3	1 4 5	1 6 7	1 8 9	1 10 11	1 12 13	1 14 15
4 8 12	2 8 10	2 9 11	2 12 14	2 13 15	2 4 6	2 5 7
5 10 15	3 13 14	3 12 15	3 5 6	3 4 7	3 9 10	3 8 11
6 11 13	6 9 15	4 10 14	4 11 15	5 9 12	5 11 14	5 9 13
7 9 14	7 11 12	5 8 13	7 10 13	6 8 14	7 8 15	6 10 12

Thế nhưng với các nhà toán học thì đáp án này là chưa đủ. Họ đặt ra câu hỏi: liệu còn có các đáp án nào khác nữa không, và liệu có cách giải tổng quát hơn không?

Cũng năm đó, các nhà toán học Anh Toenuâydơ (Twelweis) và Kaixây (Kaisei) đã thêm một bước vào bài toán này.

Liệu có thể vạch ra một cách sắp xếp trong vòng 13 tuần, không chỉ trong mỗi tuần phù hợp với các quy định đặt ra cho bài toán ở trên mà còn phải làm thế nào cho mỗi học sinh trong vòng 13 tuần lại có thể quay về ở một tổ cùng với các học sinh trong một ngày trước đó trong chu trình này.

Bài toán đã hết sức khó, mãi đến năm 1979 mới được Đana (Dangars) giải được nhờ máy tính điện tử.

Cachơman chỉ đặt ra bài toán với 15 nữ sinh, nhưng các nhà toán học đã mở rộng đến 3k nữ học sinh và bài toán nữ sinh đã được mở rộng rất nhiều.

Lời giải tổng quát của bài toán được một sinh viên hệ toán của trường Đại học sư phạm Cát Lâm (Trung Quốc) là Lục Gia Hi đưa ra năm 1961. Nhưng đáng tiếc cách giải vẫn chưa được công bố.

Năm 1971, một học giả Italia là Xcathari (Scathari) và Uynxơn (Wilson), một giáo sư toán học trường Đại học Cacha (Cachar), đã công bố lời giải về bài toán Cachơman và giải quyết trọn vẹn bài toán này.

Năm 1981, Lục Gia Hi đã trở thành một nhà toán học xuất sắc nhưng vẫn để tâm nghiên cứu bài toán nữ sinh Cachơman. Việc giải bài toán nữ sinh Cachơman một cách cơ bản có liên quan với một số bài toán phức tạp hơn là bài toán nhóm ba Stanay. Bài giải được công bố trên một tập sách có uy tín của toán học thế giới vào năm 1983 "Lí thuyết tổ hợp".

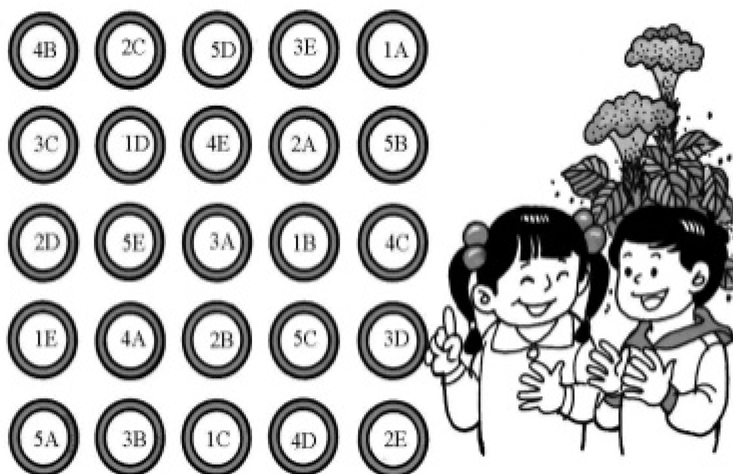
Nhưng bài toán nhóm ba Stanay lúc đó còn chưa được giải quyết trọn vẹn. Bài toán được nhà toán học Hà Lan là Talin (Thalins) hoàn thành vào tháng 10 năm 1989.

Cần nói thêm rằng bài toán nữ sinh Cachơman không có lời giải duy nhất mà có thể có nhiều lời giải khác nhau.

Từ khoá: *Bài toán nữ sinh Cachơman.*

169. Bài toán 36 sĩ quan là gì?

Bài toán 36 sĩ quan bắt nguồn từ một truyền thuyết. Truyện kể rằng có lần một quốc vương nước Phổ tiến hành một cuộc duyệt binh lớn, truyền lệnh cho sáu chi đội lính tham gia để duyệt binh. Quốc vương quy định mỗi chi đội phải chọn sáu sĩ quan có quân hàm khác nhau (ví dụ có thể chọn sĩ quan thượng tá, trung tá, thiếu tá, và thượng uý, trung uý, thiếu uý). Vậy mỗi chi đội chọn sáu sĩ quan thì sáu chi đội sẽ có 36 sĩ quan. Quốc vương yêu cầu sĩ quan xếp thành đội hình sáu hàng ngang và sáu hàng dọc, ở mỗi hàng ngang và hàng dọc, các sĩ quan phải không cùng hàm và không cùng đơn vị. Viên sĩ quan điều hành bày đi, xếp lại vẫn không đạt được đội hình theo đúng yêu cầu của Quốc vương. Về sau, câu chuyện lan truyền ra ngoài, mọi người ai nấy cũng đều tìm các phương án sắp xếp đội hình nhưng rốt cuộc không ai thu được kết quả. Vấn đề này được gọi là "vấn đề 36 sĩ quan" và lưu truyền rộng rãi. Vấn đề khó này đã thu hút nhiều tâm lực của nhiều nhà toán học nổi tiếng.



Người ta tìm thấy rằng, nếu Quốc vương đề ra yêu cầu ít hơn hoặc nhiều hơn một chút, ví dụ yêu cầu bày thành năm hàng ngang, năm hàng dọc hoặc bảy hàng ngang bảy hàng dọc thì có thể được, nhưng với sáu hàng ngang sáu hàng dọc thì không thể được. Ta thử xét trường hợp xếp thành bảy hàng ngang bảy hàng dọc.

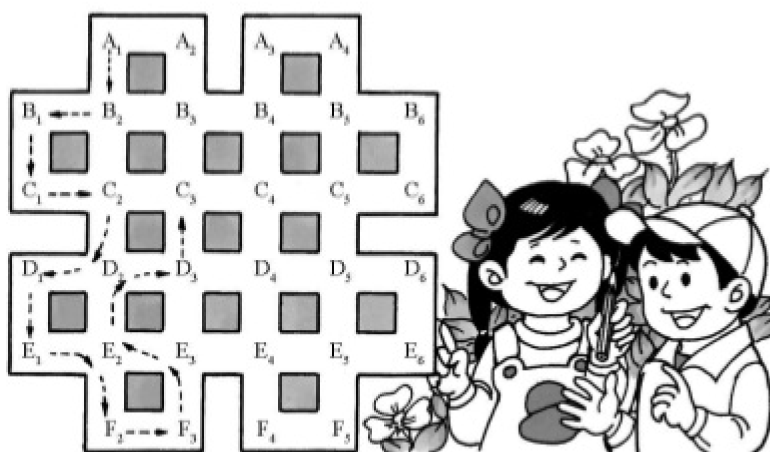
A, B, C, D, E, F, G, biểu diễn các đơn vị bộ đội, các chỉ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 chỉ các cấp quân hàm của các sĩ quan. Ở mỗi hàng ngang, hàng dọc đều có chữ cái *A, B, C, D, E, F, G* biểu diễn đó là các sĩ quan từ 7 đơn vị, các chỉ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 chỉ các cấp quân hàm của các cấp sĩ quan khác nhau.

Ngày nay bài toán 36 sĩ quan thuộc một bài toán của phép toán tổ hợp. Các đội hình sắp xếp được gọi là ma trận hoặc ma trận chữ nhật, ví dụ cách xếp sáu hàng ngang sáu hàng dọc gọi là ma trận vuông cấp sáu. Do từ ban đầu các yếu tố của ma trận đều biểu diễn nhờ các chữ cái Latinh *A, B, C, D...* nên các ma trận này thường được gọi là các ô vuông Latinh. Bảng vuông Latinh phù hợp với điều kiện trực giao gọi là "bảng vuông trực giao". Bài toán 36 sĩ quan thuộc loại bài toán của phép toán tổ hợp của bảng vuông Latinh trực giao. Nhà toán học kiệt xuất ơle (L. Euler) đã chứng minh là ma trận vuông cấp sáu theo yêu cầu của Quốc vương Phổ là không thể được, kết luận này đã được nhà toán học Pháp Thali chứng minh vào năm 1901. Thế là bài toán 36 sĩ quan đã được giải quyết. Đó chính là các ma trận vuông Latinh trực giao. Các ma trận này được ứng dụng rộng rãi trong công tác thiết kế, thí nghiệm. Trong công nghiệp, nông nghiệp, trong khoa học kĩ thuật luôn cần phải tiến hành một số lớn việc sắp xếp tổ chức các tổ thực nghiệm. Việc sử dụng các bảng vuông Latinh trong công tác thiết kế, thực nghiệm có thể giảm đi nhiều công sức trong việc sắp xếp, tiết kiệm được nhiều sức người, sức của, tăng được hiệu quả công việc.

Từ khoá: *Bài toán 36 sĩ quan; Ma trận vuông Latinh.*

170. Thế nào là bài toán vẽ liền một nét?

Nếu có một mê cung như ở hình vẽ, Aơ1 là điểm vào, còn bên trong là đường đóng kín. Bạn xét xem có thể xuất phát từ điểm A1 không đi lặp lại và đi đến lối ra? Đó là trò chơi toán học cổ: bài toán "vẽ liền một nét", tức là từ một điểm theo các lối trên hình vẽ, vẽ liền một nét, không có sự lặp đi lặp lại, mà ra đến điểm cuối.



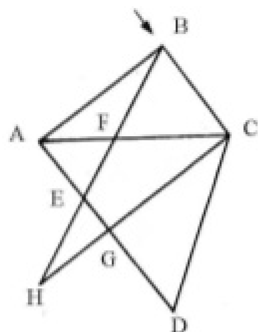
Thế với loại đồ hình như thế nào thì vẽ liền được một nét? Liệu có các quy luật gì về các đồ hình này không? Dưới đây ta xét một hình (như hình 1). Ta có thể dùng bút nối liền hai điểm bất kì trên hình vẽ, các hình vẽ như vậy là các hình "liên thông". Người ta có thể chia các điểm trên hình vẽ thành hai loại: có những điểm nối với một số lẻ các đường thẳng (như các điểm *A* và *B*); có những điểm nối với số chẵn các đường thẳng là các điểm chẵn (như với các điểm *C, D, E, F, G, H*). Tuy có nhiều loại hình vẽ nhưng để có thể vẽ liền thành một nét chỉ có hai loại:

1. Trên hình vẽ chỉ có các điểm chẵn, với các hình loại này ta có thể nối liền hai điểm bất kì trên hình vẽ bằng một nét liền.

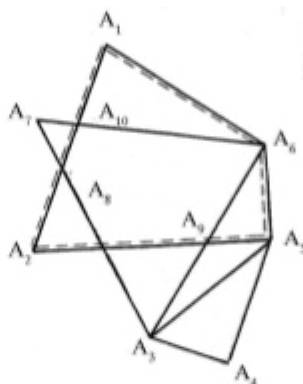
2. Trên hình vẽ chỉ có hai điểm lẻ, có thể dùng bút nối hai điểm lẻ bằng một nét liền.

Ta xét hình vẽ liên thông không hề có các điểm vẽ như ở hình 2. Ta thấy có thể nối hai điểm bất kì của hình bằng một nét liền có thể quay về điểm ban đầu. Ví dụ như xuất phát từ A_1 qua A_2, A_5, A_6 cuối cùng quay về A_1 (theo đường nét đứt trên hình vẽ). Bây giờ ta bỏ bớt một bộ phận của hình vẽ và sẽ thu được hình vẽ 3. Hình 3 vẫn là hình có điểm chẵn. Với hình này ta cũng có thể xuất phát từ một điểm bất kì, ví dụ A_6 ta vẽ liền một nét lại quay về A_6 theo con đường ví dụ A_6, A_7, A_3, A_6.

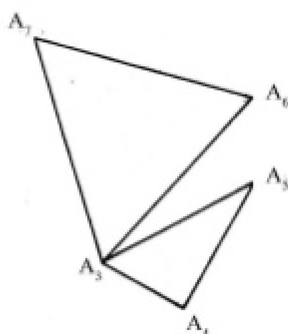
Từ hình vẽ 2 ta cũng có thể có đường khép kín rộng hơn ví dụ theo con đường: A_2, A_5, A_6, A_7, A_3, A_6, A_1. Bằng cách tương tự ta có thể có được con đường khép kín từ một bộ phận của hình vẽ thành hình vẽ liền một nét.



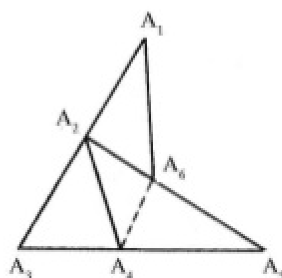
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

Bây giờ ta sẽ bàn đến loại tình huống thứ hai trên hình 4 ta chỉ có hai điểm lẻ; còn lại thì toàn là chẵn. Ta chỉ cần vẽ thêm một đường phụ nối hai điểm lẻ lập tức chúng biến thành hai điểm chẵn và sẽ trở thành các điểm liên thông như ở trường hợp 1. Và có thể bằng một nét liền kể cả theo đường nét đứt: Như theo con đường A_6, A_4, A_2, A_1, A_6, A_5, A_4, A_3, A_2, A_6. Sau đó bỏ nét đầu tiên ta có con đường A_4, A_2, A_1, A_6, A_5, A_4, A_2, A_6.

Đến đây chúng ta có thể giải quyết vấn đề mê cung đặt ra từ ban đầu. Bởi vì các đường trên hình này đều liên thông vì các điểm giao nhau toàn là điểm chẵn, nên có đường nối thành nét liền mà không cần có sự đi lặp khi xuất phát từ một điểm đi hết toàn bộ đoạn đường và quay về điểm xuất phát. Trong đó có một đoạn lịch trình có thể là A_1, B_2, C_1, C_2, D_2, D_1, E_1, E_2, F_1, F_2, E_3, E_2, D_2, D_3, C_3, C_2, B_2, B_3, C_3, C_4, D_4, D_3, E_3, E_4, F_3, F_4, E_5, E_4, D_4, D_5, D_6, E_6, E_5, D_5, C_5, C_4, B_4, B_5, B_6, C_6, C_5, B_5, A_4, A_3, B_4, B_3, A_2, A_1.

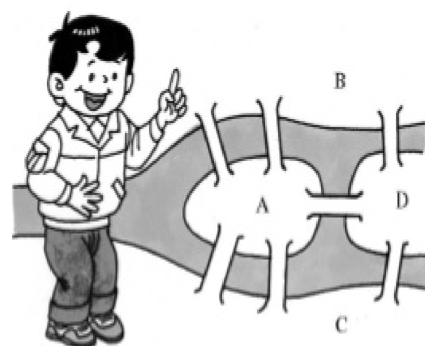
Thực ra còn có thể có nhiều cách đi khác. Các bạn hãy thử xem.

Từ khoá: *Vấn đề vẽ một nét; Hình liên thông; Điểm lẻ điểm chẵn.*

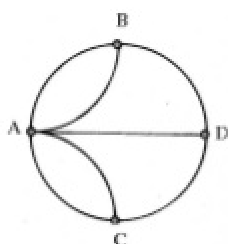
Vấn đề bảy chiếc cầu nảy sinh vào thế kỉ XVIII tại thành phố Kơnichxbec (Kửnigsberg), vào thời đó Kơnichxbec thuộc Đức, còn ngày nay là thành phố Kaliningrat (Kaliningrad) thuộc Cộng hoà Liên bang Nga.

Vào thời đó ở thành phố Kơnichxbec có một con sông có hai hòn đảo nhỏ. Các hòn đảo nối với bờ nhờ bảy chiếc cầu như ở hình vẽ 1. Trên hình *A, D* là hai hòn đảo, còn *C, B* là đôi bờ. Cư dân của thành phố Kơnichxbec thường đến dạo chơi trên đảo. Lâu dần nảy sinh câu hỏi: Liệu có thể xuất phát từ một điểm, không bỏ sót cũng không đi qua cầu hai lần mà trở về chỗ cũ? Vấn đề này về sau được gọi là bài toán bảy cây cầu.

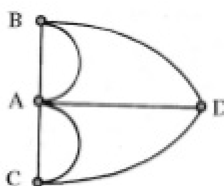
Nếu lược bỏ điều kiện "lại trở về chốn cũ" mà chỉ còn hỏi: "Liệu một du khách có thể không bỏ sót mà lại có thể chỉ qua cầu một lần? thì sẽ biến thành vấn đề vẽ liền một nét.



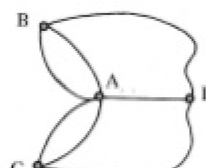
Hình 1



Hình 2



Hình 3 (a)



Hình 3 (b)

Nếu vấn đề giải được, ta nói bài toán "có lời giải"; nếu ngược lại, ta nói vấn đề "không có lời giải".

Vào thời đó, nhà toán học Thuỵ Sĩ Ơle (L. Euler) đang sống tại Kơnichxbec và bài toán bảy cây cầu đã gây cho ông nhiều hứng thú. Năm 1736, Ơle đã công bố luận văn giải quyết được bài toán bảy cây cầu và sáng tạo ra ngành "toán đồ" là một ngành của toán học. Luận văn này của Ơle là luận văn đầu tiên về toán đồ.

Theo phương pháp toán đồ, để dễ xem xét thảo luận thường người ta dùng phương pháp đơn giản hoá các hình vẽ. Ta biểu diễn các đảo *A, D* và đôi bờ *C, B* thành các điểm đỉnh như hình 2. Bảy cây cầu được biểu diễn bằng bảy nét liền, cũng được gọi là bảy đường viền. Nếu một đỉnh có nối với số lẻ các đường viền ta gọi đó là đỉnh lẻ, còn đỉnh nối với các số chẵn các đường viền, ta gọi đó là đỉnh chẵn. Nếu từ hình vẽ ta bắt đầu từ một điểm đỉnh liên tiếp qua điểm, đường, điểm...đến liên tiếp một đỉnh điểm bất kì, người ta nói hình này là liên thông. Ơle đã chứng minh "quy tắc phán định".

Với một hình vẽ được bằng một nét liền thì hình đó là liên thông và là những hình mà trừ điểm đầu và điểm cuối thì các điểm khác phải là điểm chẵn.

Yêu cầu để một bài toán đi về vẽ liền một nét có lời giải là phải liên thông và bất kì điểm đỉnh nào cũng phải là điểm chẵn.

Bài toán bảy cây cầu là bài toán vẽ nét liền đi và về, vì bốn đỉnh A, B, C, D của hình 2 đều là đỉnh lẻ nên bài toán không có lời giải. Bất kì một khách du lịch nào cũng không thể từ một điểm xuất phát lại quay về chốn cũ mà không bỏ sót hoặc đi qua một cây cầu nào đó hai lần.

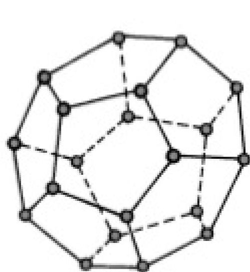
Với hình 2 không chỉ là việc yêu cầu quay về chốn cũ mà ngay việc vẽ nét liền cũng không thực hiện được mà không bỏ qua hoặc lặp lại hai lần.

Như vậy từ bài toán bảy cây cầu, chúng tôi đã giới thiệu bài toán vẽ nét liền. Bài toán vẽ nét liền nếu đặt một cách chính xác thì phải phát biểu như sau: Cho một hình phẳng, liệu có thể giữ cho bút không rời mặt giấy mà xuất phát từ một điểm, các đường chỉ được bút vẽ một lần mà hoàn thành được hình vẽ. Còn nếu yêu cầu sau khi vẽ xong hình thì bút phải quay về vị trí ban đầu thì đó là bài toán vẽ nét liền đi và về. Bạn hãy theo quy tắc Ơle để phán đoán xem hình 3 có thể là một hình: 1) Vẽ liền được một nét; 2) Nếu là hình vẽ được một nét thì có thể đi và về được không? Mời các bạn làm thử.

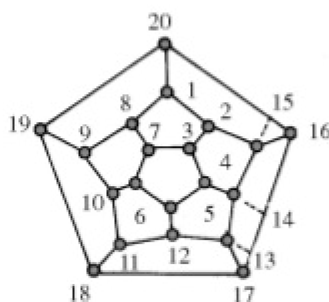
Từ khoá: *Bài toán bảy chiếc cầu.*

Vào năm 1859, nhà toán học Anh Hamintơn (Hamilton) đã công bố một bài toán khá lí thú làm nhiều người đã phải bỏ nhiều công sức để giải nó.

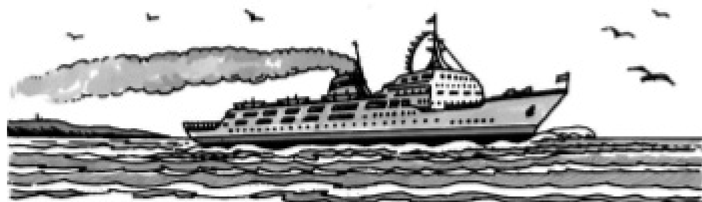
Bài toán như sau: Một khách du lịch muốn đi thăm 20 thành phố trên thế giới, mỗi thành phố đều có ba đường đi nối với thành phố bên cạnh. Khách muốn đi thăm tất cả các thành phố đã chọn, lại muốn với mỗi thành phố chỉ ghé qua một lần. Yêu cầu đặt ra là chọn điểm xuất phát như thế nào để sau khi đi thăm 20 thành phố ông ta lại quay về được điểm xuất phát.



Hình 1



Hình 2



Vậy phải sắp xếp chuyến du lịch như thế nào?

Ta sẽ đúc kết bài toán bằng cách vẽ một khối lập thể như hình 1, trong hình có 20 đỉnh điểm,

mỗi đỉnh đại diện cho đường đi giữa các thành phố (mỗi đỉnh có ba đường). Vấn đề của chúng ta theo hình vẽ xác định được một đường gấp khúc khép kín có thể chạy qua được hết các đỉnh.

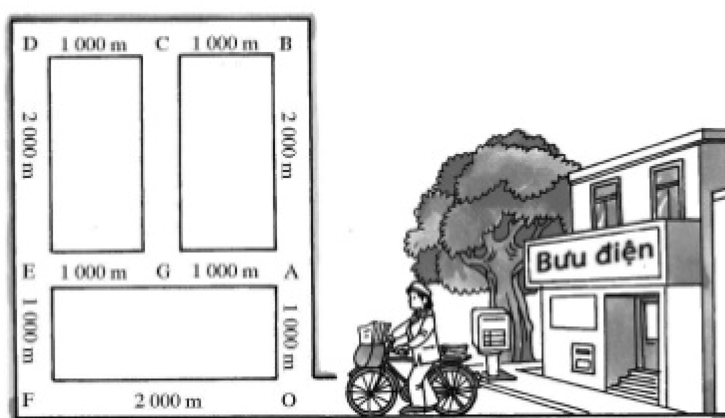
Chúng ta tưởng tượng như khối lập thể được làm bằng dây cao su nối lại với nhau, nhờ vậy ta có thể triển khai khối lập thể thành hình phẳng (hình 2) và chúng ta dễ dàng tìm thấy con đường phải chọn (đường nét liền trên hình 2). Đương nhiên đó chỉ là một giải pháp, còn có thể có nhiều cách giải khác.

Bài toán này ban đầu chỉ là một trò chơi, một bài toán vui, đến thế kỉ XX đã phát triển thành nội dung chủ yếu của một ngành toán học là "đồ luận", mà phương pháp giải lại thuộc một ngành toán học khác "tôpô học".

Từ khoá: *Hình vẽ Haminlton; Bài toán Haminlton.*

Người bưu tá ở một bưu cục thường phải phát thư từ, bưu kiện, báo chí đến các địa phương lân cận một trạm bưu điện nào đó ví dụ như trình bày ở hình 1. Hằng ngày ông ta xuất phát từ trạm bưu điện đặt tại điểm O, đi qua hết các đoạn đường lớn, đường ngang ngõ tắt để phân phát tới các bưu điện.

Để giảm bớt việc đi lặp lại nhiều lần một đoạn đường, người bưu tá phải nghĩ cách để tìm ra đường ngắn nhất. Trên thực tế, đó chính là vấn đề vẽ một nét. Điểm khởi đầu và điểm kết thúc đều là trạm bưu điện (điểm O). Dựa vào nguyên lí giải bài toán vẽ một nét, không đi lặp lại con đường nhiều lần, thì trên hình vẽ này tối đa chỉ phải có 2 điểm lẻ.



Nhưng trên hình vẽ này lại có bốn điểm A, C, E, G là các điểm lẻ nên để trên lộ trình không đi lặp lại một đoạn đường nào là không thể được. Thế nhưng cũng có thể chọn cách đi nào đó mà sự lặp lại là ít nhất.

Hình 2 Hình 3

Cách thứ nhất: Theo hình 1 ta sẽ vẽ tuyến đường đi như ở hình 2. Nếu ta vẽ thêm một vài đoạn mới vào hình vẽ trên. Nếu tính cả những đoạn mới vẽ thì mỗi điểm lẻ trên hình vẽ trở thành điểm chẵn, do đó có thể vẽ bằng một nét. Cách vẽ là: O → B → C → G → A → B → C → D → E → F → O. Theo cách vẽ này ở những đoạn có vẽ thêm là đoạn đường phải lặp lại. Nhưng cách đi này đã là tốt nhất chưa? Chưa, vì trong *ABCGA* độ dài các đoạn trùng lặp lại dài hơn các đoạn khác.

Cách đi thứ hai: Ta xoá các đoạn AB, BC, CG ở hình 2 nhưng lại vẽ thêm *A, G* như hình 3. Tuy hình này không thể không có sự trùng lặp bằng một nét, nhưng đoạn vẽ thêm nghĩa là đoạn đi trùng lặp lại ngắn hơn. Bây giờ cách đi sẽ là O → A → C → D → E → G → A → G → C → D → E → F → O.

Rõ ràng so với cách thứ nhất, cách thứ hai giảm bớt số đoạn trùng lặp, đây là cách đi trùng lặp có đoạn đường đi ngắn nhất. Đây là cách đi mà trong lộ trình phần trùng lặp không vượt quá phần không trùng lặp.

Vào thời Chiến Quốc ở Trung Quốc, có lần vua Tề cùng với Điền Kỵ đã cho tiến hành một cuộc đua ngựa. Đôi bên đều có ba loại ngựa ; loại một, loại hai, và loại ba. Cuộc đua được tiến hành ba vòng, ai thắng sẽ được 1000 lạng vàng tiền thưởng.

Lúc khai cuộc đôi bên đều dùng loại ngựa đồng cấp để đua với nhau. Trong cùng một loại ngựa thì ngựa Điền Kỵ đều kém ngựa của nhà vua, nên khi đua ngựa cùng cấp Điền Kỵ đều thua. Bây giờ Tôn Tẫn một người bạn của Điền Kỵ đã nêu cho ông một ý kiến: Điền Kỵ nên dùng ngựa loại ba đua với ngựa loại một của nhà vua, dùng ngựa loại một đua với hạng hai và dùng loại hạng hai đấu với ngựa hạng ba của nhà vua. Như vậy thì trừ cuộc đua của ngựa loại ba của Điền Kỵ với ngựa loại một của Nhà vua, Điền Kỵ thua cuộc còn ở hai cuộc đua khác Điền Kỵ đều thắng. Kết quả Điền kỵ đã thu được thắng lợi với tỉ số 2: 1.

Ý kiến của người bạn Điền Kỵ ngày nay được xem là một bài toán. Điều quan trọng là trong cuộc đua thứ hai Điền Kỵ đã chọn đúng đối sách. Thực ra trong thực tế cuộc sống, trong các cuộc đấu tranh đối kháng như các cuộc thi đấu thể thao hay các cuộc chiến đấu đều cần phải chọn đối sách để có thể thu được thắng lợi trong cuộc đấu, mà muốn chọn đúng đối sách phải thông qua toán học để tìm giải pháp. Ngành toán học nghiên cứu vấn đề này là ngành toán học mới, đó là “Đối sách luận”.

Từ khoá: *Đối sách.*

Ngày nay lí thuyết tập hợp đã trở thành cách dẫn dắt các kết luận toán học, trở thành công cụ quan trọng cho các luận chứng toán học trong các sách toán bậc trung học. Nhiều bạn học sinh đã quen thuộc và nắm chắc lí thuyết tập hợp. Thế nhưng chắc các bạn chưa hề biết là trong quá trình phát triển lí thuyết tập hợp đã gặp phải nguy cơ nghiêm trọng thậm chí làm lung lay các cơ sở của toán học.

Vào những năm 70 của thế kỉ XIX khi các nhà toán học Đức đặt cơ sở cho lí thuyết tập hợp, các nhà toán học đã cho rằng toán học đã bước đến chỗ tuyệt vời. Trong Đại hội Toán học Quốc tế năm 1900, nhà lãnh đạo giới toán học Panjalai đã cao hứng tuyên bố: "Toán học đã đến chỗ hoàn toàn chặt chẽ".

Thế nhưng vào năm thứ hai, nhà toán học, nhà triết học Anh Russel đã phát hiện một mâu thuẫn hết sức to lớn trong lí thuyết tập hợp.

Có thể chia tập hợp thành hai loại: Loại tập hợp thứ nhất có đặc trưng là bản thân tập hợp là phần tử của tập hợp đó. Ví như có người đương thời đã từng nói "cái mà tập hợp có chính là đã tạo nên tập hợp". Đặc trưng thứ hai của tập hợp là: "Bản thân tập hợp không phải là phần tử của tập hợp", ví dụ tập hợp các điểm trên một đường thẳng. Đương nhiên tập hợp chỉ có thể thuộc một trong hai loại. Bây giờ giả sử R là thuộc tập hợp thứ hai. Thế thì *R* có phải thuộc tập hợp đó không?

Nếu *R* là tập hợp loại 1: thì *R* phải là phần tử của tập hợp đó, nhưng theo định nghĩa *R* chỉ do loại tập hợp thứ hai tạo nên. Nhưng nếu *R* thuộc loại tập hợp loại hai, thì theo định nghĩa của *R, R* phải là phần tử của *R* và rõ ràng là *R* lại thuộc loại tập hợp thứ nhất. Như vậy quay đi quay lại đều khó, không có câu trả lời. Đó chính là "nghịch lí Russel nổi tiếng".

Do nghịch lí Russel hết sức khó lí giải, nên người ta lại dùng sự việc hàng ngày để so sánh và đưa ra logic "nghịch lí người thợ cắt tóc". Ở một thôn nọ có người thợ cắt tóc nổi tiếng với lập luận anh ta chỉ cho phép người không tự cạo mặt cạo mặt cho mình. Khi tuyên bố như vậy người thợ cắt tóc đã lâm vào thế bí: Anh ta có tự cạo mặt cho mình không? Nếu anh ta tự cạo mặt thì lại ngược lại lời tuyên bố "chỉ để cho ai không cạo mặt cạo mặt cho mình". Nhưng nếu không cạo mặt thì lại trái với nguyên tắc "để cho người không cạo mặt mình đi cạo mặt".

Sự phát hiện nghịch lí Russel làm lung lay cơ sở lí thuyết tập hợp và cơ sở toán học bị một chấn động rất lớn và người ta gọi đó là "nguy cơ lần thứ ba" của toán học. Để giải quyết mâu thuẫn này, các nhà toán học đã tiến hành các nỗ lực hết sức khó khăn biến lí thuyết tập hợp từ hình thức dẫn chứng tiến đến phương pháp tiên đề và năm 1908 ngài Meilor đã đưa ra phương án tiên đề hoá lí thuyết tập hợp. Tôn chỉ của ông là cần có "hạn chế về định nghĩa tập hợp" đảm bảo loại bỏ các mâu thuẫn, lại có thể bảo tồn được "các nội dung có giá trị lớn của lí thuyết tập hợp Canto". Trong các tiên đề Meilor về tập hợp không có cách nói "cái mà tập hợp có chính là đã tạo nên tập hợp". Phương án tiên đề hoá các cải tiến bổ sung của Flunkel và Skeland tạo nên hệ tiên đề ZF trong lí thuyết tập hợp hiện đại. Đương nhiên ngoài hệ tiên đề ZF còn có các hệ tiên đề khác.

Nghịch lí và nguy cơ không hề làm nghiêng ngả cơ sở của toán học mà trong quá trình xây dựng hệ thống tiên đề đã giúp loại bỏ các nghịch lí, lí thuyết tập hợp đã được phát triển và hoàn thiện và cơ sở của toán học ngày càng có cơ sở vững chắc.

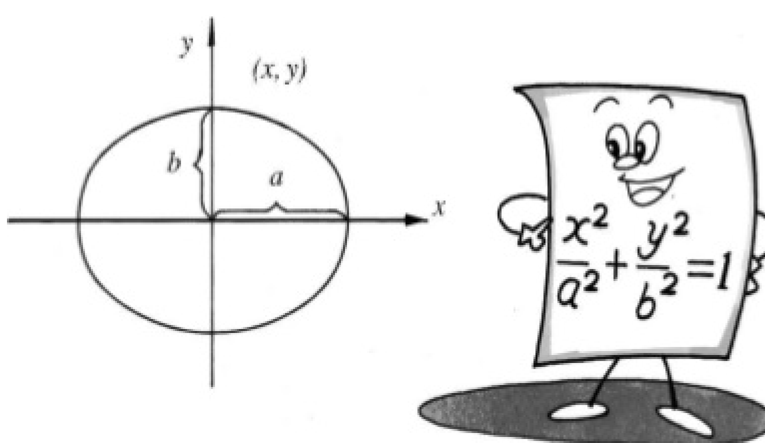
Từ khoá: *Nghịch lí Russel; Nghịch lí người thợ cắt tóc; Nguy cơ của toán học; Lí thuyết tập hợp.*

Cũng như nhiều khoa học tự nhiên khác, toán học được sinh ra do nhu cầu thực tiễn của cuộc sống loài người. Vào thế kỉ XVI trở về trước, đại đa số các ngành khoa học tự nhiên cũng như toán học, phản ánh trạng thái ổn định và ít biến đổi của nhiều sự vật. Do các vấn đề tương đối đơn giản hoặc yêu cầu giải quyết không quá cao, nên nói chung thường sử dụng các số không đổi (toán học sơ cấp), các phép tính số học, đại số sơ cấp hoặc hình học sơ cấp là có thể giải quyết được. Ví dụ khi nghiên cứu chuyển động tìm ra mối liên quan giữa quãng đường đi và tốc độ. Từ thế kỉ thứ XVI trở về trước, mọi vấn đề tốc độ đều là tốc độ không thay đổi, nên mối tương quan giữa quãng đường đi và tốc độ không có gì quá phức tạp. Khi dùng hệ thức: quãng đường = tốc độ x thời gian, dễ dàng tính được quãng đường đi ở mọi thời gian bất kì.

Khi cần tính diện tích và chu vi của đường tròn do không cần kết quả quá chính xác nên chỉ cần tính diện tích, chu vi của các đa giác đều nội tiếp hoặc ngoại tiếp vòng tròn thay cho diện tích, chu vi vòng tròn.

Từ thế kỉ XVI trở về sau, chủ nghĩa tư bản phát triển ở Châu Âu, khoa học tự nhiên và toán học do đó cũng phát triển theo. Thực tiễn sản xuất đưa khoa học tự nhiên và toán học đến với nhiều vấn đề nghiên cứu mới. Ví dụ yêu cầu nghiên cứu các chuyển động có tốc độ thay đổi, yêu cầu tính chính xác diện tích, chu vi các hình tròn v.v... Từ đó các bài toán đã được nghiên cứu rộng rãi thời cổ đại như các hình elip, parabon, hypecbon cũng như đường xoắn ốc được xem xét và nghiên cứu lại theo quan điểm mới. Chẳng hạn người xưa cho các hình này là đứng yên, ổn định thì nay ví dụ hình elip là quỹ đạo chuyển động của các hành tinh quanh Mặt Trời, còn đường parabon là quỹ đạo các vật thể chuyển động nghiêng, các đường cong này phản ánh chuyển động với tốc độ thay đổi. Rõ ràng là thực tiễn sản xuất đã đặt ra cho khoa học tự nhiên và toán học nhiều vấn đề nghiên cứu mới là nghiên cứu chuyển động và sự thay đổi của chuyển động. Để giải quyết các vấn đề này rõ ràng là sử dụng các phương pháp cũ với các đại lượng không thay đổi là không thể được. Các đại lượng biến thiên, các biến số do đó được đưa vào trong toán học một cách tự nhiên.

Vào năm 1637, nhà toán học Pháp là Descartes (1596 - 1650) lần đầu tiên đã đưa ra khái niệm "đại lượng thay đổi" để biểu diễn các đại lượng có giá trị thay đổi trong một quá trình nào đó và kí hiệu là x và y. Nhờ khái niệm đại lượng biến thiên (biến số) với một hình ví dụ hình elip khi gán vào một hệ trục toạ độ trục (*y*-*x*) có thể biểu diễn dưới dạng phương trình $x^2/_a + y^2/_b = 1$ để biểu diễn tính chất của hình elip. Nếu một elip được mô tả chuyển động của một hành tinh nào đó quanh Mặt Trời thì tính chất của hành tinh được mô tả trên toàn bộ các tham số của hình elip.



Liên quan đến khái niệm đại lượng biến thiên, Enghen đã viết "Các chất điểm trong toán học chính là biến lượng của Descartes. Có khái niệm đại lượng biến thiên (tức biến lượng) sự chuyển động đã thâm nhập được vào toán học, có biến lượng là phương pháp biện chứng đã thâm nhập vào toán học. Có biến lượng các phép tính vi phân, tích phân đã trở thành tất yếu".

Từ khoá: *Đại lượng biến thiên (Biến lượng).*

Toán học nói chung là tìm các mối liên quan giữa số và hình, thông qua các mối quan hệ đặc biệt để nhận thức các quy luật khách quan. Vì vậy chúng ta có thể nói toán học là môn khoa học nghiên cứu về các mối quan hệ, tức "quan hệ học".

Ở bậc tiểu học, chúng ta đã nghiên cứu các phép tính cộng, trừ, nhân, chia giữa hai số. Nắm chắc mối quan hệ đó chúng ta có thể áp dụng vào các vận động trong cuộc sống đời thường và có thể tìm thấy các vấn đề có liên quan đến các con số.

Khi chúng ta so sánh các vật ta dùng khái niệm to, nhỏ, bằng nhau ta lại sử dụng một loại quan hệ khác: quan hệ so sánh hai vật. Khi đánh giá khả năng học tập của một học sinh người ta dùng biện pháp thi cử để đánh giá thành tích của từng học sinh. Khi cần so sánh hình dạng hoặc dung tích của hai hình, người ta có thể dùng các tri thức về hình học để tính toán diện tích, thể tích, sau đó mới so sánh các vật, các hình liên quan.

Các loại định lí trong toán học có thể nêu rõ được các mối quan hệ nội tại của các vật: Ví dụ định lí về tổng bình phương các cạnh vuông góc bằng bình phương đường huyền của tam giác vuông nêu lên mối quan hệ về độ dài các cạnh góc vuông với độ dài của đường huyền.

Các công thức tính toán, ví dụ công thức tính diện tích S của tam giác S = $^1/_2$đáy x chiều cao, phản ánh mối quan hệ giữa diện tích của hình tam giác với độ dài của cạnh đáy và chiều cao của hình tam giác.

Hàm số cũng là phản ánh một mối quan hệ trực tiếp giữa các đại lượng biến thiên với nhau, ví dụ $y = f(x_1, x_2 ... x_n)$ phản ánh mối quan hệ giữa đại lượng biến thiên y với một nhóm các đại lượng biến thiên khác $x_1, x_2 ... x_n$.

Trong toán học không có chỗ nào không tồn tại "quan hệ". Vấn đề mà toán học nghiên cứu chính là nghiên cứu các mối quan hệ.

Từ khoá: *Toán học; Quan hệ học.*

Toán học là ngành học nghiên cứu tính "chặt chẽ" và tính "chuẩn xác". Trong các phép tính toán đều phải thực hiện từng bước theo các quy tắc tính. Trong các chứng minh hình học mỗi bước suy luận phải có lí do, có căn cứ. Các quy tắc, lí do, căn cứ là các yêu cầu "logic". Mặc dù chúng ta chưa hề học qua một giáo trình về "logic" nhưng toán học đã đem lại cho ta cách tư duy lôgic một cách tự nhiên, vô thức. Các định lí toán học đã được dùng phương pháp logic để chứng minh, từng bước, từng bước một cách có căn cứ, có cơ sở lí luận, suy ra các kết quả hoàn toàn chính xác, không có gì nghi ngờ. Đó là đặc điểm chính của toán học. Vì vậy học cách suy luận lôgic, đó chính là một trong những mục tiêu khi học toán.

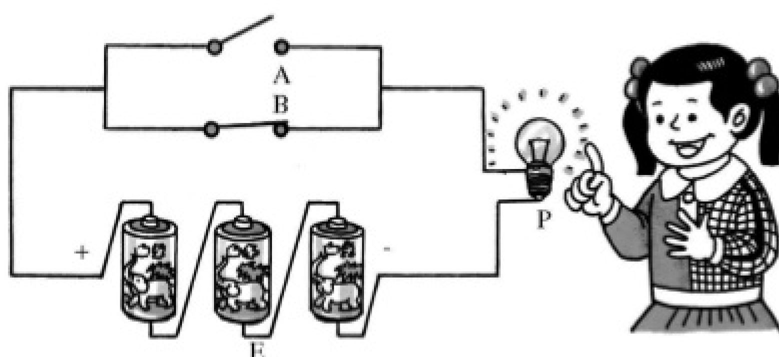
Thực ra thì suy luận lôgic toán học là loại tư duy hình thức mà không phải là toàn bộ. Toán học còn cần có quan sát trực quan, cần có dự đoán, cần có tưởng tượng. Với phương pháp suy luận lôgic: với các tiên đề chính xác các suy luận sẽ dẫn đến kết luận chính xác. Thế nhưng tiền đề đến từ đâu và có chính xác không và suy luận theo phương nào và tiến hành như thế nào thì suy luận

lôgic không có cách nào xác định được. Ví dụ "giữa hai điểm ta chỉ có thể vẽ một đường thẳng", "qua một điểm cho trước ta chỉ có thể vẽ một đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước", các mệnh đề trên đều phải qua quan sát phân tích hiện thực mà nhận được. Các khái niệm số π, số lẻ vô hạn tuần hoàn, số dương, số âm đều bắt nguồn từ việc quan sát, khảo sát hiện thực, kinh qua tư duy sáng tạo mà rút ra được. Cho nên có thể nói lôgic rất quan trọng, toán học cần đến lôgic, nhưng toán học không đồng nhất với lôgic học.

Từ khoá: *Toán học; Suy luận lôgic.*

Ở toán học sơ cấp, chúng ta đã biết 1 + 1 = 2. Nhưng khi học đến hệ đếm cơ số 2 thì 1 + 1 = 10 mà không phải là 1 +1 = 2, bởi vì trong hệ đếm cơ số 2 không có chữ số 2.

Và như vậy ta phải viết 1 + 1= 1. Tại sao vậy? Đó là phép cộng lôgic.



Trong đại số lôgic ta chỉ có hai kí hiệu 1 và 0, giống như ở hệ đếm cơ số hai. Thế nhưng ở hệ đếm cơ số 2 thì chữ số 1 chính là chữ số 1, còn số 0 chính là chữ số 0. Còn trong đại số lôgic 1 và 0 không phải là chữ số mà chỉ là kí hiệu. Trong mạch lôgic thông thường thì 1 biểu hiện dòng điện đã thông, còn 0 biểu hiện dòng điện bị ngắt.

Giả sử có mạch điện; trong mạch điện này: *E* nguồn điện (giả sử đó là các pin khô), *P* là bóng đèn nhỏ. Khi mạch điện thông thì bóng đèn *P* sẽ sáng ứng với kí hiệu 1. Khi mạch điện bị ngắt, bóng đèn *P* sẽ tắt ứng với kí hiệu 0.

Trên hình vẽ, *A* và *B* là hai công tắc. Khi công tắc đóng thì mạch thông, khi công tắc ngắt, mạch hở.

Nếu bây giờ ta đóng công tắc *A* và ngắt công tắc *B*. Mạch điện sẽ thông qua công tắc *A* và bóng đèn *P* sẽ sáng, ta được 1.

Nếu ta ngắt công tắc *A*, mở công tắc *B* thì mạch cũng sẽ thông qua công tắc *B* và bóng đèn *P* cũng sẽ sáng, ta cũng được 1.

Giả sử bây giờ cả hai công tắc *A* và *B* đều mở, cả hai mạch điện đều thông tức ứng với 1+1. Thế nhưng bóng đèn *P* cũng chỉ sáng với mức độ bình thường nên cũng chỉ là 1.

Nếu biểu diễn bằng công thức toán học thì 1 +1 = 1.

Như vậy có chính xác không?

Theo các tình huống vừa trình bày ở trên, khi đóng công tắc *A* thì được 1, khi đóng công tắc *B*

cũng được kí hiệu 1. Khi đóng đồng thời cả hai công tắc *A* và *B* ta cũng chỉ được 1. Tại sao vậy? Đó chính là phép cộng theo đại số logic.

Từ khoá: *Đại số lôgic.*

Nói đến toán học là nói đến cái gì đó thận trọng, chính xác. Các kiến thức đưa vào sách toán đều phải trải qua các chứng minh chặt chẽ, chính xác 100%. Thế tại sao trong toán học lại có vấn đề "dự đoán". Đó là vì "trong sáng tạo toán học cũng giống với bất kì loại sáng tạo khoa học nào. Trước khi chứng minh một định lí toán học, trước hết bạn phải dự đoán nội dung định lí đó. Trước khi bạn cho các chứng minh rõ ràng định lí, bạn phải nghĩ con đường chứng minh. Bạn phải từ các quan sát, suy luận, tổng hợp, so sánh. Bạn phải "lặp đi, lặp lại nhiều lần".

Đoạn văn trên là của nhà toán học Mỹ G. Bonia. Từ đoạn văn trên ta có thể thấy bất kì kết luận nào trong toán học đều do các nhà toán học vận dụng các loại dự đoán khác nhau. Trong toán học, dự đoán chính là phương pháp phát hiện là một phương pháp, phương thức tư duy sáng tạo.

Đương nhiên với các dự đoán có thể có hai khả năng:

Một là dự đoán được chứng minh là chính xác và như vậy từ dự đoán ta nhận được một định lí.

Hai là dự đoán bị chứng minh là sai lầm. Ví dụ định lí Ferma (1601-1665). Dựa vào với n = 0, 1, 2, 3, 4 thì 22n +1 là một số nguyên tố đã đưa ra dự đoán với các số tính theo công thức $2^{2n}+1$ là một số nguyên tố. Kết quả là dự đoán đã bị Euler bác bỏ vì n = 5 thì số $2^{32} + 1 = 641 \times 6700414$ là một hợp số. Có phải một dự đoán bị chứng minh là sai lầm có phải hoàn toàn vô ích? Đương nhiên là không. Bởi vì khi dự đoán đang còn có giá trị thì đương nhiên trong dự đoán có hàm chứa một tính quy luật nào đó mà nhờ đó trong các tình huống thích hợp có thể có các cải tiến có ích, có thể có các ứng dụng vào các mục đích nghiên cứu khác.

Đương nhiên cũng có những dự đoán chưa được chứng minh toàn vẹn nhưng đã hấp dẫn sự chú ý liên tục của nhiều học giả. Trong quá trình nghiên cứu cách chứng minh đã sinh ra nhiều phương pháp lí luận mới, thúc đẩy toán học phát triển. "Dự đoán Goldbach" nổi tiếng là một ví dụ. Tuy dự đoán được nhận định là chính xác nhưng chưa được chứng minh hoàn toàn.



Vì vậy dự đoán là một vấn đề khó. Cũng có những vấn đề khó tạm thời còn chưa đưa ra được dự đoán. Ví dụ việc đưa ra một số nguyên tố rất lớn cho đến nay vẫn chưa có dự đoán, ngay cả liên tưởng đến số nguyên tố lớn này vẫn chưa có, nên còn chưa có cách để ra tay.

Chúng ta học toán không chỉ học tập các kết quả của người đi trước mà chủ yếu là học tập phương pháp tư duy.

Từ khoá: *Dự đoán.*

181. Số nguyên và số chẵn có nhiều như nhau không?

Số chẵn và số nguyên có nhiều như nhau không? Nhiều bạn chưa kịp suy nghĩ đã trả lời "không, không như nhau, bởi vì số chẵn là một bộ phận của số nguyên". Hoặc cũng không ít người tỏ ý hoài nghi về câu hỏi này, không nắm chắc lắm nên trả lời: "có thể nhiều như nhau vì số nguyên và số chẵn có đối ứng 1 - 1", Trong số đó có bạn viết lên bảng đối ứng 1 - 1 giữa số nguyên và số chẵn:

...	-n	...	-2	-1	0	1	2...	m	...
...	-2n		-4	2	0	2	4...	2m	...

Trong hai loại ý kiến thì ai đúng, ai sai?

Bản chất vấn đề nêu trên chính là việc so sánh sự to nhỏ của hai tập hợp: tập hợp số nguyên và tập hợp số chẵn. Việc so sánh độ to, nhỏ của hai tập hợp hữu hạn khá đơn giản, nhưng với các tập hợp vô hạn thì thế nào là "to nhỏ" so với nhau, và so sánh được thực hiện như thế nào?

Đối với một tập hợp hữu hạn thì dựa vào số phần tử có trong mỗi tập hợp để so sánh và làm thước đo cho độ to, nhỏ. Ví dụ:

1. Một bộ phận so với toàn thể (theo lập luận của lí thuyết tập hợp) thì bộ phận nhỏ hơn toàn thể.

2. Nếu giữa hai tập hợp có thể thiết lập đối ứng 1 -1 giữa các phần tử của hai tập hợp thì chúng có độ lớn như nhau.

Hai cách trả lời trình bày trên kia chính là hai kết quả dựa vào hai tiêu chuẩn khác nhau đối với một tập hợp đơn giản suy ra cho một tập hợp vô hạn.

Thực ra trong hai tiêu chuẩn thì tiêu chuẩn hai là bản chất. Ta hãy suy nghĩ một chút từ "ba" có thể được trừu tượng hoá từ những sự vật gì? Mọi người đều biết có thể có "tập hợp ba con chó", "tập hợp ba người", "tập hợp ba quyển sách" v.v... Như vậy thông qua việc quan sát các sự vật khác nhau trên thực tiễn ta có thể đưa ra tập hợp "ba" trừu tượng có cùng đặc tính.

Tại sao tập hợp "ba" lại có cùng tính chất mà "tập hợp bốn người" lại không có cùng tính chất? Điểm chủ yếu của "ba" là có cùng tính chất có thể thiết lập đối ứng 1 - 1 giữa chúng: ba người chăn dắt ba con chó thành đối ứng giữa "tập hợp ba con người" với "tập hợp của ba con chó". Ba người đọc ba quyển sách ta thiết lập đối ứng 1 - 1 giữa "tập hợp ba người" với "tập hợp của ba quyển sách".

Theo phương thức tư duy này ta có thể mở rộng cho tập hợp vô hạn và thành lập lí luận "độ to nhỏ" của tập hợp vô hạn. Với hai tập hợp (hữu hạn hay vô hạn) ta có thể thiết lập sự đối ứng 1 - 2 ta nói hai tập hợp có cơ số như nhau. Nếu như một tập hợp có thể thiết lập mối quan hệ đối ứng 1 - 2 với một tập hợp khác thì người ta nói tập hợp thứ nhất có cơ số không lớn hơn tập hợp thứ hai. Từ khái niệm khá trừu tượng là "cơ số" ta có thể so sánh độ lớn nhỏ của cơ số. Cơ số chính là được suy rộng từ khái niệm phần tử của tập hợp hữu hạn cho tập hợp vô hạn.

Theo định nghĩa đó, tập hợp có cơ số nhỏ nhất trong các tập hợp vô hạn chính là tập hợp các số tự nhiên. Bởi vì nếu có một tập hợp vô hạn, cứ mỗi lần ta rút ra một phần tử từ tập hợp đó, trong tập hợp vẫn tồn tại (dĩ nhiên không có phần tử bị rút ra), quá trình rút ra các phần tử của tập hợp có thể liên tục được thực hiện, và như vậy có thể thiết lập mối quan hệ 1 - 1 giữa các phần tử tập hợp vô hạn đã xét với tập hợp các số tự nhiên. Trong toán học người ta dùng chữ Hy Lạp X để kí hiệu tập hợp vô hạn (X đọc là Khi) và dùng kí hiệu X_0 để kí hiệu tập hợp các số tự nhiên.

Quay lại vấn đề đặt ra từ ban đầu ta có thể suy ra tập hợp các số nguyên và số chẵn có cùng một số giống nhau, tức số nguyên và số chẵn có cùng một số và từ đó có cùng độ lớn như nhau, tức số nguyên và số chẵn nhiều như nhau. Sự thực thì cả hai tập hợp đều có cơ số là X_0. Ta chỉ cần sắp xếp các số nguyên thành dãy 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3...không một số nguyên nào có thể lọt ra ngoài bảng sắp xếp, và do đó ta đã thiết lập một đối ứng 1-1 giữa tập hợp số nguyên và tập hợp số tự nhiên. Từ đó có thể chứng minh các số hữu tỉ cũng có cơ số là X0. Các bạn có thể sắp xếp để thấy cơ số của tập hợp các số hữu tỉ là X_0.

Đương nhiên cũng có các tập hợp có cơ số khác X_0. Dưới đây ta sẽ chứng minh tập hợp các số thực là loại tập hợp như vậy.

Chúng ta đã thấy tập hợp vô hạn được mở rộng từ cơ số tập hợp hữu hạn nhưng giữa cơ số của tập hợp vô hạn và tập hợp hữu hạn có sự khác biệt rất lớn.

Từ khoá: *Số nguyên; Số chẵn; Tập hợp; Cơ số.*

182. Thế nào là "giả thiết liên tục"?

Trên đây chúng ta vừa nghiên cứu tập hợp số thực có cơ số không phải là X0. Để đưa ra kết luận này, điểm chủ yếu là không thể sắp xếp các số thực theo bất kì thứ tự nào. Thậm chí ta không thể sắp xếp các số thực trong khoảng 0 và 1 theo thứ tự. Ta có thể dùng phản chứng để chứng minh kết luận này. Giả sử ta có thể sắp xếp các số thực từ 0 - 1 thành dãy và ghi được:

$$x_i = 0, a_{i1}\, a_{i2}\, a_{i3}\, a_{i4}...$$

trong đó a_{ij} là số lẻ thập phân ở vị trí *j*, đương nhiên là a_{ij} lấy các giá trị từ 0 đến 9 là 10 số.

Giả sử ta lại chọn số y = 0, $b_1b_2b_3b_4$...và $b_i \neq a_i$ (việc này dễ dàng thực hiện) bởi vì chỉ cần lấy một số lẻ ở *y* khác với x_i là ta có $y \neq x_i$ và do đó y sẽ không thuộc nhóm số đã sắp xếp (tức nhóm x_y). Từ mâu thuẫn này ta thấy không thể dùng bất kì cách nào để nhận được sự đối ứng 1 - 1 giữa các số x_y với tập hợp số tự nhiên.

Cơ số của tập hợp số thực là X_1. Như vậy liệu có còn cơ số nào trung gian giữa A_O và X_1? Theo Canter, người sáng lập lí thuyết tập hợp không có cơ số nào khác X0 và X1ơ, nói cách khác tập hợp vô hạn các số thực chỉ có thể là X_O và X_1. Đó chính là vấn đề "hệ thống liên tục". (Người ta xem tập hợp số thực cũng như tập hợp các điểm trên đường thẳng là "hệ thống liên tục", đó chính là vấn đề "hệ thống liên tục").

Vấn đề hệ thống liên tục có ý nghĩa quan trọng trong nhiều ngành toán học. Từ khi vấn đề hệ thống liên tục được đưa ra, nhiều nhà toán học hết sức cố gắng để chứng minh hoặc phủ định nó. Tại hội nghị toán học quốc tế năm 1900, nhà toán học nổi tiếng Bordad đưa ra 23 bài toán được sự chú ý của nhiều nhà toán học đương thời, trong đó bài toán hệ thống liên tục là một trong các bài toán đó. Thế nhưng cũng giống như tiên đề song song trong hình học Euclide, các nhà toán học phát hiện không có cơ sở để bác bỏ nó, cũng không chứng minh được nó. Cho đến năm 1938, Cadel chứng minh hệ tiên đề ZF của lí thuyết tập hợp thuộc vấn đề hệ thống liên tục là không thể phủ định. 25 năm sau, Cohen lại chứng minh hệ tiên đề ZF thuộc hệ thống vấn đề liên tục là không thể chứng minh được. Thành tựu của Cadel và Cohen được xem là hai thành tựu lớn trong công tác nghiên cứu toán học của thế kỉ XX. Nó cũng bày tỏ hệ tiên đề ZF và vấn đề "hệ thống liên tục" là độc lập với nhau và biến "vấn đề liên tục" thành "giả thiết liên tục". Cũng có nhiều nhà toán học còn chưa yên lòng với "giả thiết liên tục" và hết sức tìm các tiên đề mới để thay thế. Hiện nay mọi người đang hết sức cố gắng trong công cuộc tìm tòi đó.

Từ khoá: *Tập hợp; Cơ số; Giả thiết hệ thống liên tục.*

183. Vì sao các động tác “đứng nghiêm, quay phải, quay trái, đằng sau quay” lại có thể là đối tượng của toán học?

“Đứng nghiêm, quay trái, quay phải, quay đằng sau” là bốn động tác không phải là con số, không phải là hình vẽ vì sao lại trở thành đối tượng của toán học? Nhiều người không rõ tại sao.

Trước hết ta thử phân tích mối quan hệ nội tại của bốn động tác! Để dễ dàng theo dõi, ta dùng các kí hiệu *I, R, L, H* để biểu diễn bốn động tác: đứng nghiêm, quay trái, quay phải, quay đằng sau theo thứ tự. Ta lập tập hợp *M* = {*I, R, L, H*}. Nếu ban đầu ta cho quay phải, sau đó ta cho quay trái, kết quả là được tư thế như ban đầu (như khi chưa thực hiện động tác quay) tức động tác đứng nghiêm như ban đầu. Nếu ta dùng “o” biểu diễn việc thực hiện hai động tác liên tiếp. Như vậy ta sẽ có L_oR = I. Tương tự RoL biểu diễn trước thực hiện quay trái, sau thực hiện quay phải, kết quả được I. H_o L biểu diễn trước hết thực hiện động tác quay trái, sau đó thực hiện động tác quay đằng sau, kết quả được R. Tiếp tục cách suy luận tương tự, ta có thể nhận được bảng sơ đồ quan hệ sau đây. Theo định nghĩa, phép tính “o” cho các yếu tố của tập hợp M, bốn phần tử của các tập hợp có mối liên quan:

o	I	L	R	H
I	I	L	R	H
L	L	H	I	R
R	R	I	H	L
H	H	R	L	I

Trước hết, với bất kì phần tử nào của *M* khi thực hiện động tác *I* cũng là chính động tác đó. 1, bởi vì khi nhân bất kì số nào với số 1 cũng được chính số đó. Do đó *I* gọi là phần tử đơn vị.

Mặt khác cũng như một số tự nhiên *a*, đều có số nghịch đảo $^1/_a$, với bất kỳ một phần tử nào của M ta cũng có thể tìm được một phần tử đối ứng để khi thực hiện liên tiếp hai động tác đó ta lại được *I*. Hai động tác như vậy được gọi là hai động tác nghịch đảo tương ứng với nhau.

Thông qua bảng sơ đồ quan hệ trên đây ta có thể thấy *L, R* là nghịch đảo tương ứng với nhau, *I* và *H* là hai phần tử tự nghịch đảo đối với bản thân mình. Mặt khác, các phép tính của các phần tử của tập hợp *M* cũng có một số tính chất: ví dụ với phép tính tinh ta cũng có quy luật kết hợp. Ví dụ $(L_oR)_o$ H = I_oH = H, còn $L_o(R_oH)$ = L_oL = H, vì vậy $(L_oR)_oH$ = $L_o(R_oH)$.

Tóm lại với bốn yếu tố của tập hợp *M: I, R, L, H* khi thực hiện phép tính o, có yếu tố đơn vị I, mỗi yếu tố đều có yếu tố nghịch đảo, khi thực hiện các phép tính với các yếu tố của *M* các phép tính cũng có quy luật kết hợp. Tất cả các quan hệ và các phép tính xác định kết cấu của tập hợp *M*. Toán học thường được trừu tượng hoá do việc nghiên cứu các đối tượng cụ thể như vậy. Vì vậy chúng ta nói các động tác “đứng nghiêm, quay phải, quay trái, quay đằng sau” tạo thành đối tượng của toán học. Môn toán học lấy các đối tượng thực tế này được trừu tượng hoá thành đại số “nhóm”. Mời các bạn xem xét sẽ thấy như các phần tử của *M* số nguyên, số hữu tỉ cũng tạo nên cấu trúc nhóm trong phép tính nhân.

Khái niệm nhóm do nhà toán học Pháp Galois đưa ra, ngày nay đã thâm nhập vào mọi lĩnh vực khác như vật lí, hoá học cũng như nhiều ngành khoa học khác. Ngay cả định lí về việc không giải được các phương trình có bậc từ năm trở lên bằng phương pháp cầu phương cũng phải dùng lí thuyết nhóm mới chứng minh được.

Từ khoá: *Đối tượng hoá học; Yếu tố đơn vị; Đơn vị nghịch đảo; Nhóm.*

184. Vì sao khi tung đồng xu, số lần xuất hiện mặt sấp, mặt ngửa như nhau?

Trước khi tiến hành các trận đấu bóng đá, người trọng tài thường ném (tung) đồng xu để xem sự xuất hiện mặt sấp hay ngửa lên trên mà quyết định đội giao bóng trước.

Với một đội đi thi đấu bóng đá thì việc giao bóng trước hay sau không có gì quan trọng. Tuy nhiên nên chú ý việc khi ném đồng xu nhiều lần ta sẽ thấy số lần xuất hiện mặt trái và mặt phải như nhau. Vì sao vậy?

Đó chính là do tác động của quy luật toán thống kê. Ta thử ném đồng xu một lần, trước khi ném đồng xu ta chưa thể nói gì về kết quả của phép thử (mặt trái hay mặt phải ở phía trên). Nhưng nếu ta ném đồng xu nhiều lần thì lại có thể tiên đoán kết quả của các phép ném thử (gọi tắt là phép thử).



Giả sử trong phép thử trên đây, ta gọi sự kiện xuất hiện mặt ngửa của đồng xu lên trên, ta gọi là sự kiện *A*, còn việc xuất hiện mặt sấp lên trên là sự kiện *B*. Khả năng xuất hiện sự kiện *A* hoặc sự kiện *B* khi ném đồng xu được gọi là xác suất *P(A)* và *P(B)*. Việc lặp lại nhiều lần phép thử thì việc xuất hiện sự kiện *A* hay *B* có tính quy luật gọi là tính thống kê. Giả sử sau nhiều lần ném đồng xu ví dụ n lần, sự xuất hiện sự kiện A có n_A lần, còn xuất hiện sự kiện *B* là n_B lần, n_A là tần số xuất hiện sự kiện A, n_B là tần số xuất hiện sự kiện *B*, ta gọi $f_n(A)$ = $^{nA}/_{n}$ là tần suất xuất hiện sự kiện *A*. Nếu $f_n(A)$ càng lớn thì sự xuất hiện sự kiện A càng dày và trong một phép thử khả năng xuất hiện sự kiện *A* càng lớn. Khi thực hiện phép thử nhiều lần thì tần suất $f_n(A)$ càng dần tiến đến xác suất *P(A)* của sự kiện A.

Qua các tính toán cụ thể ta có thể nhận rõ được tính quy luật này. Giả sử cách ném đồng xu là thực hiện như nhau trong các lần ném, sự xuất hiện sự kiện *A* hay *B* trong mỗi lần ném là như nhau (đồng khả năng) nên *P(A) = P(B)* = 0,5, hoặc có thể viết $P(n_A = 1) = P(n_A = 0) = 0,5$. Nếu thực hiện nhiều lần phép thử có thể xuất hiện bốn loại kết quả:

(A,A) (A,B) (B,A) (B,B).

dễ dàng tìm thấy

$P(n_A = 2) = 0,25$

$P(n_A = 1) = 0,5$

$P(n_A = 0) = 0,25$

Ví dụ sau 10.000 lần thực hiện phép thử người ta ghi lại được sự kiện *A* xuất hiện 4900 - 5100 và 4800 - 5200

Và xác suất của sự kiện $P\,(4900 \le n_A \le 5100) \approx 84,26\%$

$P(4800 \le n_A \le 5200) \approx 99,54\%$.

hay xác suất để

$$P(0{,}49 \leq f_n(A) \leq 0{,}51 \approx 84{,}26\%$$

$$P(0{,}48 \leq f_n(A) \leq 0{,}52 \approx 99{,}54\%$$

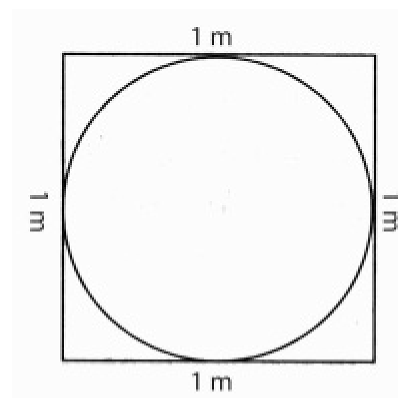
Đã có khá nhiều người thực hiện loại phép thử kể trên.

Người thí nghiệm	n_A	n_A	$f_n(A)$
Magan	2048	1061	0,5181
Phổ phong	4040	2048	0,5069
K.Borsun	12.000	6019	0,5016
L.Borsun	24.000	12012	0,5005

Từ khoá: *Xác xuất; Quy luật thống kê; Tần số; Tần suất.*

185. Vì sao dùng phương pháp xác suất có thể tính được giá trị gần đúng của số π?

Bạn đã từng nghe nói đến việc dùng thí nghiệm để tính diện tích hình tròn chưa? Lấy một tờ giấy trắng diện tích 1 m^2. Trong tờ giấy ta vẽ vòng tròn đường kính 1 m (như hình vẽ). Vòng tròn sẽ tiếp xúc với hình vuông tại một điểm trên mỗi cạnh của hình vuông. Diện tích của hình tròn sẽ là $\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$. Sau đó bạn ném từng hạt, từng hạt vừng vào tờ giấy một cách tuỳ ý.



Khi bạn ném các hạt vừng, bạn có thể nhờ một bạn khác ghi lại: Tổng có bao nhiêu lần ném, có bao nhiêu hạt vừng rơi vào vòng tròn?

Sau khi thí nghiệm kết thúc bạn chỉ cần lấy số hạt vừng rơi vào bên trong vòng tròn chia cho tổng số hạt vừng đã ném.

Kết quả tính được chính là diện tích của hình tròn. Người ta đã nhận được kết quả như sau trong 2000 lần ném hạt vừng có 1572 hạt rơi vào bên trong vòng tròn và ta có diện tích hình tròn là $^{1572}/_{2000} = 0{,}786m^2$. Con số này rất gần với diện tích hình tròn là $^{\pi}/_{4}$. Từ diện tích này sẽ tính được số $\pi = 4 \times 0{,}768 = 3{,}144$. Nếu số hạt vừng được ném đi càng lớn thì kết quả tính sẽ càng chính xác.

Thí nghiệm kì lạ này không phải được tiến hành một cách vô căn cứ. Chúng ta biết khả năng để hạt vừng rơi vào bên trong vòng tròn

$$\text{(trong toán học được gọi là “xác suất”} = \frac{\text{diện tích vòng tròn}}{\text{diện tích hình vuông}}\text{).}$$

Vì diện tích hình vuông là 1 m^2 nên

Diện tích hình tròn bằng xác suất số hạt vừng rơi vào bên trong vòng tròn

$$\text{Diện tích hình tròn bằng xác suất số hạt vừng rơi vào bên trong vòng tròn} = \frac{\text{số lần hạt vừng rơi vào bên trong vòng tròn}}{\text{tổng số hạt vừng đã ném}}$$

Việc sử dụng một phương pháp mang tính may rủi (phương pháp ngẫu nhiên) để xác định một vấn đề toán học xác định được gọi là phương pháp Montecarlo nổi tiếng. Có được phương pháp Montecarlo người ta có thể qua mô hình sự kiện may rủi để xác định các quy luật toán học xác định.

Từ khoá: *Xác suất; Phương pháp Montecarlo.*

186. Vì sao dùng phương pháp thí nghiệm chéo có thể tăng cao hiệu suất thí nghiệm?

Có hai loại hạt giống 1 và 2, cần tìm hiểu xem loại hạt giống nào cho sản lượng cao người ta phải tiến hành các thí nghiệm. Nếu đem hạt giống 1 gieo vào mảnh đất *A* còn hạt giống 2 gieo vào mảnh đất *B*. Kết quả thu hoạch có thể cho biết loại hạt giống nào cho sản lượng cao và dựa vào đó đánh giá chất lượng cao, ắt có người nói đó là mảnh đất *A* phì nhiêu hơn, tốt hơn mảnh đất *B*. Từ đó có thể cách thí nghiệm như vừa mô tả không có hiệu quả mong muốn.

Chỉ cần thay đổi phương án thí nghiệm một chút: Trên các mảnh đất *A* và *B* ta đều chia thành hai nửa: một nửa gieo trồng hạt giống 1, một nửa gieo trồng hạt giống 2. Kết quả thực nghiệm sẽ không làm chúng ta thất vọng.

Dựa vào kết quả thí nghiệm (như ở hình bên dưới) ta không chỉ nhận biết được hạt giống 2 cho sản lượng cao hơn hạt giống 1, mà còn cho biết là mảnh đất B phù hợp với sự sinh trưởng của cây hơn mảnh đất A.

Sản lượng / Hạt giống / Đất	甲	乙
A	325 Kg	354 Kg
B	353 Kg	362 Kg

Từ các kết quả cho thấy: cách bố trí thí nghiệm tốt thì cho dù số lần thí nghiệm không nhiều cũng có thể đạt được kết quả vừa ý. Nhưng nếu bố trí thí nghiệm không tốt, cho dù có tiến hành nhiều thí nghiệm thì kết quả thí nghiệm sẽ không đáp ứng được yêu cầu. Phương pháp thí nghiệm chéo là một cách bố trí thí nghiệm cho phép tiết kiệm được thời gian, tiền của mà kết quả lại đạt hiệu quả tốt nhất.

Ví dụ cần nghiên cứu ảnh hưởng của ba yếu tố tuổi mạ, số lượng dảnh mạ và phân bón đối với cây lúa nước. Ta có thể chọn hai mức: về tuổi mạ chia thành hai mức non, trưởng thành, về số dảnh mạ chia làm 150.000/ha và 250.000/ha; phân bón 4 tấn/mẫu và 6 tấn/mẫu. Đối với ba yếu tố này kết hợp với hai mức theo cách làm như trên ta có $2^3 = 8$ cách phối hợp. Có cách nào tiết kiệm được sức lực hơn không? Cần xem xét cách thí nghiệm chéo ta có thể chỉ cần làm bốn thí nghiệm là có thể đạt được mục đích. Phương pháp thực hiện và kết quả được trình trong bảng sau:

Số hiệu thí nghiệm	Các yếu tố			Sản lượng
	I Tuổi mạ	II Số dảnh mạ	III Phân bón	
1	mạ non	150.000/mẫu	0,4 tấn/ha	295 kg/mẫu
2	mạ non	250.000/mẫu	0,6 tấn/ha	300 kg/mẫu
3	mạ trưởng thành	150.000/mẫu	0,6 tấn/ha	375 kg/mẫu
4	mạ trưởng thành	250.000/mẫu	0,4 tấn/ha	345 kg/mẫu

Ta thử xem xét hai lần thí nghiệm với hai mức thí nghiệm, ta thấy được 595 kg còn với mạ trưởng thành được 720 kg. Trong đó bao gồm cả số dảnh mạ và phân đạm.

Từ đó có thể thấy với mạ trưởng thành cao hơn mạ non 125 kg. Tương tự khi xét ảnh hưởng số dảnh mạ là (295 + 375) - (3000 + 345) = 25 kg. Từ đó cho thấy với số dảnh mạ 150.000/mẫu cao hơn 250.000/ha. Còn với phân đạm thì mức 600 kg/ha cao hơn 800 kg/ha (300 + 375) - (295 + 345) = 35 kg.

Từ các kết quả thí nghiệm cho thấy sử dụng các chế độ canh tác: mạ trưởng thành, số dảnh mạ 150.000/mẫu, phân đạm 600 kg/mẫu cho sản lượng cao nhất. Từ kết quả thí nghiệm cũng có thể đi đến kết luận: Nhân tố ảnh hưởng đến sản lượng chủ yếu là tuổi mạ, tiếp đến là lượng phân bón, thứ ba mới đến số dảnh mạ.

Dùng phương pháp thí nghiệm chéo có thể giảm số lần thí nghiệm, lại có thể đạt được hiệu quả dự định. Nếu số nhân tố và mức thí nghiệm càng nhiều thì phương pháp thí nghiệm chéo càng tiết kiệm được nhiều hơn. Ví dụ khi thí nghiệm với tám nhân tố và bảy mức thí nghiệm thì bình thường phải tiến hành đến 7^8 = 5.764.801 lần, nếu dùng phương pháp thí nghiệm chéo chỉ cần 49 lần thí nghiệm chứng tỏ hiệu suất thí nghiệm được tăng cao rất nhiều lần.

Từ khoá: *Phương pháp thí nghiệm chéo.*

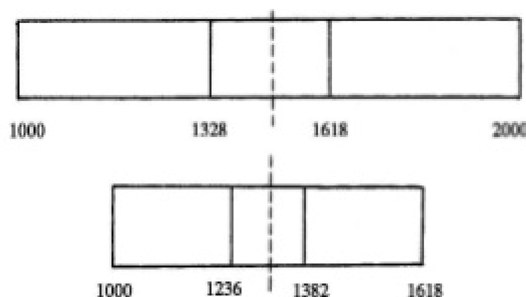
187. Dùng phương pháp gấp giấy đểtiến hành thí nghiệm như thế nào?

Trong thực tiễn sản xuất và sinh hoạt hằng ngày người ta hay gặp vấn đề “chọn lựa tối ưu”. Ví dụ trong phương pháp luyện thép, người ta có thể đưa thêm một loại nguyên tố hoá học nào đó để tăng cường độ của thép, người ta ước tính cần phải thêm từ 1000 g đến 2000 g của nguyên tố nọ cho một tấn thép. Thế thì lượng tối ưu của nguyên tố đưa vào là bao nhiêu? Chúng ta cần phải qua thí nghiệm để xác định. Nếu mỗi lần thí nghiệm ta tăng từng 10g một thì cần phải tiến hành 100 thí nghiệm. Thế nhưng có cách nào tiết kiệm được không?

Dưới đây chúng tôi xin giới thiệu “phương pháp gấp giấy”. Dùng một băng giấy, ta vạch lên đó 1000 đến 2000 vạch. Tính toán để ghi các vạch là bội số của 0,618, 1000 + (2000 - 1000) x 0,618 = 1618. Sau đó ta chọn lấy 1618g lượng nguyên tố hoá học làm một thí nghiệm cho một tấn thép.

Sau đó ta lại gấp đôi băng giấy, vạch một vạch đối xứng với vạch 1618 qua vết gấp. Vạch mới

này sẽ ở vị trí 1000 + (2000 - 1618) = 1382. Ta lại lấy 1382 g nguyên tố hoá học cho làm thí nghiệm với một tấn thép khác. Sau hai lần thí nghiệm, đem so sánh kết quả. Nếu với thí nghiệm 1382 g lại thu được loại thép có cường độ cao, ta cắt bỏ đoạn giấy ở bên phải vạch 1618 (nếu trái lại thì cắt bỏ phần bên trái vạch 1382). Lại gấp đôi phần băng giấy còn lại. Lại vạch một vạch đối xứng với vạch 1382 qua vết gấp, vạch này sẽ là vạch 1000 + (1618 - 1382) = 1236.



Lại lấy 1236 g nguyên tố hoá học đem làm thí nghiệm, rồi lại so sánh các kết quả nhận được. Các thí nghiệm lại được tiến hành theo thủ tục vừa mô tả. Như vậy cứ mỗi lần thí nghiệm đoạn giấy còn lại sẽ là bội số của 0,618.

Cứ tiếp tục tiến hành thí nghiệm theo phương án đã chọn và sẽ chọn được lượng tối ưu nguyên tố hoá học đưa vào luyện thép.

Việc chọn phạm vi thí nghiệm là điều hết sức quan trọng cho phương pháp gấp giấy để chọn tối ưu. Để làm được việc đó cần dựa vào kinh nghiệm hoặc các tư liệu thực nghiệm để ước lượng phạm vi thí nghiệm. Nếu gặp phải trường hợp điểm tối ưu nằm ngoài phạm vi ước lượng thì sẽ ra sao? Đương nhiên cũng không quan trọng lắm. Bởi vì khi đó thì khung thí nghiệm cũng sẽ tiến dần đến điểm tối ưu, qua mỗi lần thí nghiệm cũng sẽ tiến hành so sánh cuối cùng sẽ xác định được điểm tối ưu. Đương nhiên khi đó phạm vi thí nghiệm sẽ mở rộng dần về phía điểm tối ưu.

Theo tính toán thì sau 16 lần thí nghiệm thực hiện theo phương án gấp giấy tương đương với 2500 lần thí nghiệm, theo phương án thường. Thực tiễn chứng minh dùng phương pháp gấp giấy vào việc sản xuất các sản phẩm mới sẽ thu được hiệu quả rất lớn.

Từ khoá: *Phương pháp chọn tối ưu; Phương pháp gấp giấy.*

188. Vì sao khi dùng phương pháp gấp giấy ta lại dùng con số 0,618?

Trên đây chúng ta vừa nghiên cứu cách thức tiến hành thí nghiệm theo phương án gấp giấy. Thế tại sao trong phương án thí nghiệm này ta lại dùng con số 0,618?

Trong cách chọn tối ưu, chúng ta đã xử lí các tình huống sau: Với một nhân tố nào đó và tại một điểm nào đó nhân tố đó chứng tỏ có ảnh hưởng tốt nhất, mà khi tăng hoặc giảm giá trị của nhân tố thì các chỉ tiêu đều giảm. Giả sử khi chọn hai điểm bất kì X_1 và X_2 làm thí nghiệm ta nhận được kết quả Y_1 kém hơn Y_2, ta có thể bỏ đi các giá trị ở bên trái X_1ơ mà không bỏ mất điểm tối ưu. Trong phương án gấp giấy việc cắt bỏ phần băng giấy cũng chính là vì lí do đó.



Để giảm bớt số lần thí nghiệm phải xét chọn điểm thí nghiệm đầu tiên?

Nếu ta dùng (0,1) để biểu diễn phạm vi thí nghiệm, trước hết ta chọn điểm *X* như hình vẽ, lại chọn điểm *Y* tiến hành thí nghiệm so sánh. Do sự xuất hiện tín hiệu tốt ở hai điểm là có khả năng như nhau, thì việc cắt bỏ phần (0, *Y*) hoặc (*X*, 1) là có khả năng như nhau. Vì các phần cắt là có độ dài như nhau nên $Y = 1 - X$

Nếu cắt bỏ phần (*X*, 1) giữ lại phần (0, *X*) trong đó có điểm Y cũng tương đương với điểm X trong khoảng (0, 1). Do đó:

$Y/X = X/1$ hay $Y = X^2$ thay $Y = 1 - X$

ta có phương trình $X^2 + X - 1 = 0$

Nghiệm của phương trình sẽ là:

$$X = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0,618039\cdots$$

Con số 0,618 trong phương thức cắt giấy chính là giá trị gần đúng của con số này. Trong phương pháp cắt giấy ta lấy một độ dài xác định chia làm hai phần, trong đó có một phần có độ dài bằng bội số của 0,618. Theo giác độ hình học người ta gọi đây là con số vàng (hoàng kim), còn điểm chia ứng với con số đó là điểm chia cắt vàng. Vì vậy, phương pháp tuyển chọn này là "phương pháp chia cắt vàng" hay "tiết diện vàng" (*btv*).

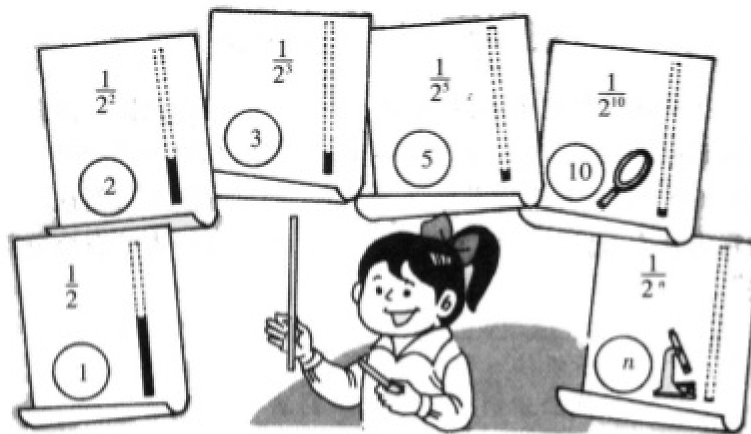
Từ khoá: *Phương pháp gấp giấy; Phương pháp chọn tối ưu; Điểm chia cắt vàng (hoàng kim); Phương pháp chia cắt vàng.*

189. Vì sao "thanh gỗ dài 1 m, mỗi ngày lấy một nửa" sẽ muôn đời không lấy hết?

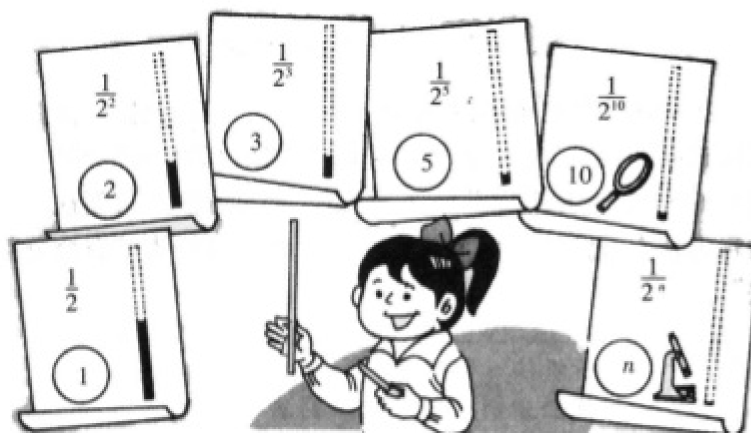
Thời Chiến Quốc ở Trung Quốc, Công Tôn Long đã đưa ra một câu nói quan trọng "Thanh gỗ dài 1 thước, mỗi ngày lấy đi một nửa, muôn đời không lấy hết được".

Câu nói đó có nghĩa gì?

Thanh gỗ dài 1 thước, ngày thứ nhất lấy đi một nửa sẽ còn lại $1/2$, ngày thứ hai lại lấy tiếp $1/2$ phần còn lại tức lấy đi $1/2 \times 1/2 = 1/4$ thước...cứ tiếp tục như thế sẽ tiếp tục lấy $1/8$ thước... tất cả sẽ thành chuỗi số.



Rõ ràng khi *n* tăng đến vô hạn thì 2^n sẽ lớn đến vô hạn còn $^1/_{2n}$ giảm nhỏ đến vô hạn, nhưng cho dù n lớn đến bao nhiêu thì $^1/_{2n}$ vẫn không thể bằng 0 được. Vì vậy câu nói lấy mãi không hết hàm ý khái niệm giới hạn. Dùng kí hiệu của toán học hiện đại ta có thể viết $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0.$.



Giới hạn là khái niệm quan trọng trong toán học. Vào thế kỉ thứ ba Lưu Huy đã sáng tạo phương pháp chia cắt vòng tròn. Ông đã phát hiện khi tăng số cạnh của đa giác đều nội tiếp trong vòng tròn đến vô hạn, thì diện tích của đa giác đều nội tiếp sẽ tiến gần đến diện tích của hình tròn và ông đã dùng phương pháp này để tính số π. Sau này Tổ Xung Chi đã dùng phương pháp này để tính số π có 7 số lẻ sau dấu phẩy.

Khái niệm giới hạn chính là cơ sở cho phép tính vi phân, tích phân hiện đại.

Từ khoá: *Giới hạn.*

190. Câu chuyện về số vô cùng bé và số 0 như thế nào?

Thế nào là số vô cùng bé? Ta xét một ví dụ hàm số *f(x)* = $^1/_x$. Khi *x* lấy giá trị càng ngày càng lớn thì hàm *f(x)* sẽ ngày càng bé và tiến dần đến 0. Ta nói hàm *f(x)* tiến dần đến số vô cùng bé khi

$x \to \infty$ (dấu "→" chỉ tiến đến).

Người ta nói hàm *f(x)* tiến đến giá trị vô cùng bé khi $x \to x_0$ (hay $x \to \infty$) và viết lim *f(x)* = 0 khi x → x0 (hay khi $x \to \infty$). Nói một cách đơn giản 0 là giới hạn của số vô cùng bé. Từ đó ta có thể thấy vô cùng bé là một đại lượng biến thiên liên tục, không ngừng giảm đến giá trị càng nhỏ và tiếp cận dần với số 0. Ví dụ *f(x)* = *x* - 1 khi $x \to 1$ cũng là số vô cùng bé.

Thế có phải số vô cùng bé là một số rất bé, ví dụ số 1 phần triệu? Cũng không phải, vì số vô cùng bé là một đại lượng biến thiên, là một hàm số khi $x \to x_0$ (hoặc $x \to \infty$), là một quá trình tiến đến số rất bé, giá trị tuyệt đối của hàm số này là một số rất bé tuỳ ý, ví dụ số ε; một số dù bé đến mấy cũng không có tính chất như vậy.

Thế số vô cùng bé so với số 0 thì sẽ ra sao? Số 0 là số xác định, là một hằng số, còn số vô cùng bé như ta vừa thảo luận ở trên lại là một đại lượng biến thiên. Có thể lấy số 0 là hình ảnh của số vô cùng bé vì *f(x)* ≡ 0, thế thì với số ε bất kì với ε > 0 ta có . Vì vậy bản thân số 0 là số vô cùng bé nhưng số vô cùng bé chưa hẳn là số 0.

Khi xét việc thực hiện bốn phép tính số học với số 0, có thể thực hiện các phép tính cộng, trừ, nhân, chia với số 0 nhưng bản thân số 0 không thể làm số chia cho một phép tính chia. Với số vô cùng bé người ta cũng thực hiện được bốn phép tính số học. Nhưng cũng không thể dùng số vô cùng bé làm số chia cho một phép tính chia hay làm mẫu số ở một phân số. Tổng hiệu của hai số vô cùng bé là một số vô cùng bé, thế nhưng với phép chia hai số vô cùng bé thì sẽ có mấy tình huống khác nhau. Ví dụ với hai số vô cùng bé là α, β là hai đại lượng biến thiên dần đến giá trị nhỏ vô cùng (trừ trường hợp α = 0), nếu tồn tại giới hạn $\lim{}^{\beta}/_{\alpha}$ thì $\lim{}^{\beta}/_{\alpha}$ có thể là hằng số, có thể là số vô cùng bé hoặc một số vô cùng lớn.

Nếu $\lim{}^{\beta}/_{\alpha} = 0$ thì β là số vô cùng bé bậc cao hơn α.

Nếu $\lim{}^{\beta}/_{\alpha} = \infty$ thì β là vô cùng bé bậc thấp hơn α.

Nếu $\lim{}^{\beta}/_{\alpha} = c$ (là hằng số ≠ 0) thì β và α là vô cùng bé đồng cấp. Đặc biệt khi c = 1 thì β và α là các số vô cùng bé có cấp bằng nhau.

Vì các vô cùng bé còn có phân biệt lớn, nhỏ nên có thể tiến hành các phép tính với các vô cùng bé.

Từ khoá: *Vô cùng bé; Hằng số; Đại lượng biến thiên; Giới hạn.*

Trong cuộc sống hàng ngày, khi nói đến không gian là nói đến "không gian thực", nói đến hình thức tồn tại khách quan của sự vật xác định bằng chiều dài, chiều rộng, chiều cao của các vật thể. Ví dụ không gian mà cái bàn, cái tủ chiếm lĩnh v.v... Còn "không gian" trong toán học vừa có ý là trừu tượng hoá hiện thực như điểm, đường, mặt phẳng, khối v.v...lại vừa do yêu cầu của bản thân toán học hoặc của các ngành khoa học tự nhiên khác mà các nhà toán học sáng tạo ra.

Ví dụ trong hình học không gian được xem là các tập hợp điểm, các tập hợp điểm này có thể là hữu hạn, vô hạn điểm. Do đó, "điểm" chỉ có vị trí, không có "điểm" to, nhỏ được trừu tượng hoá và xem là một không gian. Thế làm thế nào có thể phân biệt được các loại không gian: đường thẳng, mặt phẳng, khối đều là những không gian có vô số điểm? Đây chính là vai trò của số chiều của không gian- không gian nhiều chiều được phát sinh từ đầu thế kỉ XX, được phát triển và hoàn thiện trong quá trình xuất hiện và phát triển của lý thuyết topo. Trong quá trình phát sinh và phát triển lý thuyết topo đã xuất hiện lí thuyết về số chiều không gian được chỉ định bằng các số nguyên và đó là định nghĩa về số chiều của không gian.

Số chiều là số thực để mô tả vị trí điểm trong không gian. Các số chiều khác nhau phản ánh các loại không gian khác nhau. Ví dụ ta nói đường là "không gian một chiều", vì vậy khi dùng một số thực *x* ta dễ dàng xác định vị trí một điểm trên một đường thẳng. Để xác định các điểm trong mặt phẳng cần có hai số thực (*x, y*) nên ta gọi mặt phẳng là không gian hai chiều. Tương tự để xác định một điểm trong một khối nào đó, ta cần ba số thực (*x, y, z*) nên không gian các hình khối được gọi là không gian 3 chiều. Còn với một hình chỉ có một điểm số chiều được xem bằng 0.

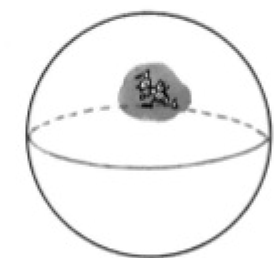
Các không gian một chiều, hai chiều và ba chiều đều có cơ sở trực giác. Các không gian từ bốn chiều trở lên đã trở thành trừu tượng. Loại không gian trừu tượng này được gọi chung là "không gian nhiều chiều".

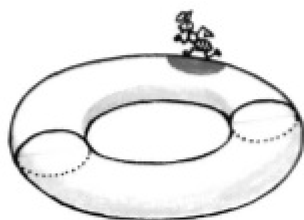
Tuy "không gian nhiều chiều" là trừu tượng nhưng rất có ích. Ví dụ khi nghiên cứu một chiếc máy bay trong không trung, các nhà khoa học cần xác định vị trí trọng tâm của máy bay đồng thời phải biết phương vị của máy bay. Để xác định vị trí trọng tâm của máy bay người ta dùng các toạ độ không gian *x, y, z*. Để xác định phương vị của máy bay tại thời điểm nào đó người ta phải dùng các góc phương vị Φ, θ, Ψ. Như vậy để xác định vị trí của máy bay ta cần 6 tham số (x, y, z, Φ, θ, Ψ). Để việc nghiên cứu được thuận tiện, người ta thường sắp xếp các tham số theo một thứ tự xác định gồm sáu trị số. Nhờ sáu trị số này ta có thể xác định một "điểm" trong không gian sáu chiều. Và "điểm" ở đây đã trở thành một trạng thái của hệ thống vật lí (như máy bay đang bay). Hệ thống vật lí này thay đổi theo thời gian, nhờ hệ "điểm" của không gian sáu chiều người ta có thể mô tả được trạng thái của hệ thống. Phương pháp miêu tả các hệ thống động bằng hình tượng hoá này hết sức tiện lợi không chỉ trong kĩ thuật công trình mà còn hết sức bổ ích trong nghiên cứu lí luận khoa học.

Từ khoá: *Không gian; Số chiều; Không gian nhiều chiều.*

Bạn thử tưởng tượng trên mặt bàn trước mặt bạn có đặt một quả bóng da và một chiếc bánh mì vòng. Một chú kiến bò qua bò lại hết sức lanh lẹn trên chiếc bánh mì vòng. Trong tâm trí chú kiến nghĩ "Ôi, quả là một chỗ tốt, vừa trơn, lại vừa phẳng, chỉ hơi mấp mô một tí xíu". Một lúc sau chú kiến bò đến chỗ quả bóng da, liệu chú kiến có biết là mình đã đổi chỗ không? Sự thực thì chú kiến nhỏ rất khó phát hiện ra điều đó? Vì chú kiến có bò ở nơi nào trên quả bóng thì tình hình xung

quanh vẫn giống khi bò trên chiếc bánh mì vòng, không phân biệt được.





Với loài người chúng ta thì câu trả lời đối với vấn đề nêu trên hoàn toàn khác. Chúng ta nói ở chiếc bánh mì trong phần ở giữa là lỗ trống, còn ở quả bóng da không hề có lỗ trống. Vả lại nếu dùng dao cắt một nhát thì quả bóng sẽ chia thành hai nửa, còn với chiếc bánh mì vòng sự việc chưa hẳn sẽ như vậy mà vẫn nguyên là "một chiếc" bánh.

Vì sao giữa chú kiến nhỏ và chúng ta lại có cách nhìn khác nhau như vậy? Bởi vì dưới mắt chú kiến chỉ là một bộ phận của sự vật, còn mắt chúng ta có thể nhìn toàn cục một quả bóng da (mặt cầu) và cái bánh mì vòng (mặt xuyến). Học thuyết topo phát triển từ đầu thế kỉ XX chính là từ cách nhìn như vậy và đã trở thành một ngành khoa học mới nghiên cứu sự vật trên toàn thể.

Bài toán "bảy chiếc cầu" đã nêu ở mục 164 là một vấn đề của lý thuyết topo. Các hòn đảo ở thành phố Koenisberg có thể to nhỏ khác nhau, nhiều hình nhiều vẻ, bảy chiếc cầu cũng dài ngắn khác nhau, có nhiều điểm khác nhau. Nhưng chúng ta đã không quan tâm đến các khác biệt cục bộ đó. Chúng ta xem các đảo như các điểm, các chiếc cầu thành các đường nối các điểm để giải quyết bài toán. Mặt cầu và mặt xuyến xét về cục bộ thì giống nhau nhưng trên toàn thể lại có thể khác nhau. Lý thuyết topo dùng "tiêu chí Euler" để chứng minh sự khác biệt giữa hai đối tượng đã xét. Tiêu chí Euler ở mặt cầu là 2 còn ở mặt xuyến là 0. Vả lại nếu thêm một chiếc cán vòng vào vòng xuyến thì số tiêu chí Euler sẽ giảm đi 2. Ví dụ nếu ghép hai vòng xuyến để tạo thành số 8 thì số tiêu chí Euler sẽ là -2.

Từ khoá: *Mặt cầu; Mặt xuyến; Topo học; Số tiêu chí Euler.*

Một băng giấy thường có mặt trái và mặt phải. Nếu ta đem một băng giấy một mặt vẫn để trắng còn mặt kia (ví dụ mặt trái) thì bôi đen, rồi kẻ một đường thẳng ở chính giữa băng giấy, sau đó dùng hồ dán hai mép lại với nhau, mặt trắng ở phía ngoài, đen ở phía trong. Ta sẽ có một cuộn giấy mặt ngoài màu trắng còn mặt trong màu đen.

Bây giờ nếu bắt một con kiến cho bò ở mặt màu trắng và không cho bò vượt mép giấy, thì cho dù con kiến bò lui, bò tới đến bao nhiêu lượt, con kiến chỉ ở bên mặt giấy trắng. Ngược lại nếu cho kiến bò ở mặt đen thì con kiến chỉ có thể bò ở trên mặt đen của cuộn giấy.

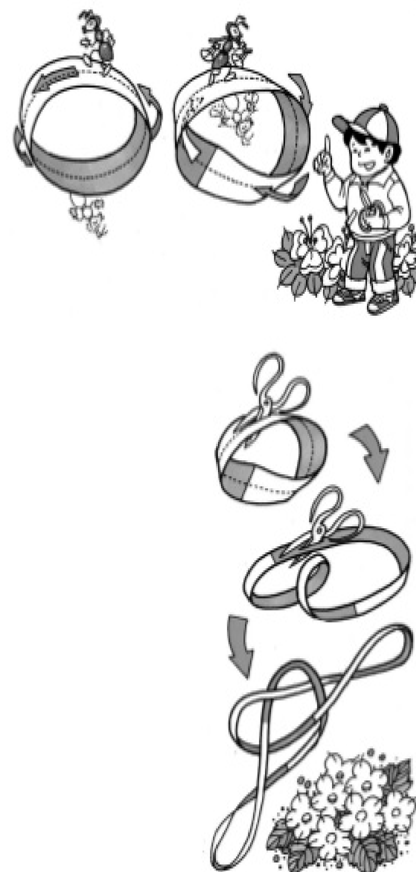
Bây giờ chúng ta lại dùng một băng giấy khác cũng sơn một mặt đen cònmặt để trắng. Khi dán hai mép băng giấy với nhau, ta lật mặt đen của băng giấy ra ngoài trước khi dán với mép kia của băng giấy, tức mặt đen của đầu này dán vào mặt trắng của đầu kia. Ta được một vòng giấy mà không thể phân biệt được đâu là mặt trái đâu là mặt phải. Nếu thả con kiến lên mặt giấy, con kiến có thể bò đến bất kì điểm nào trên giấy cả mặt đen lẫn mặt trắng mà không cần bò vượt qua mép giấy. Nói cách khác, vòng giấy đã trở thành chỉ có một mặt.

Không chỉ có thế, vòng giấy này lại có một đặc tính kì lạ nữa! Nếu bạn dùng kéo cắt băng giấy theo đường kẻ ở giữa, bạn sẽ không được hai vòng giấy mà lại được một vòng giấy có độ dài hơn vòng cũ. Nếu bạn lại cắt vòng giấy mới này theo một đường kẻ ở giữa băng giấy mới bạn sẽ được hai vòng giấy lồng vào nhau. Nếu không tin bạn thử thực hiện xem.

Bạn xem có kì lạ không? Đây là một sự thực mà toán học đã nghiên cứu và được gọi tên là vòng giấy Mobius nổi tiếng.

Từ khoá: *Vòng giấy Mobius.*

Nhà triết học Hi Lạp cổ đại Pythagoras cách đây hơn 2500 năm đã từng nói: “Tất cả đều là con số. Đến ngày hôm nay sau 25 thế kỉ, câu này đã có được sự giải thích mới mẻ hơn.



Thế giới đã phát triển đến ngày hôm nay, điện thoại di động, máy ảnh số, hộp thư điện tử đang ngày càng trở thành một phần không thể thiếu trong đời sống hàng ngày. Chỉ trong nháy mắt, chúng ta đã có thể gửi thư, mua hàng, mượn sách..., những việc mà trước đây phải mất rất nhiều thời gian mới có thể làm được. Cuộc sống thay đổi một cách nhẹ nhàng, mà tất cả những thay đổi ấy là đều bắt nguồn từ con số, nó đang lặng lẽ đi vào thế giới mà chúng ta đang sinh tồn, đồng thời đã nắm được vận mệnh và huyết mạch của xã hội hiện đại khi rất nhiều người còn chưa cảm nhận thấy

Sự ra đời của máy tính đã dẫn đến hết làn sóng cách mạng số này đến làn sóng cách mạng số khác. Con số đầu tiên đã tuyên bố thắng lợi của mình so với các chữ cái, trong nội bộ máy tính, các chữ cái được chuyển hóa thành một dãy các số *0*”, “*1* dài dài. Với phương thức tương tự, con số đã chiến thắng cả âm thanh và hình ảnh mô phỏng, đem lại cho con người sự hưởng thụ nghe nhìn ró nét và chân thực hơn. Đồng thời, kĩ thuật số đã mở ra một cánh cửa tiện dụng cho việc lưu trữ dữ liệu và thông tin: Về bộ nhớ, nó vượt cả não người; về tốc độ, nó dường như có thể địch được với pha ánh sáng.

Con số đã chiếm lĩnh các lĩnh vực của đời sống, sản xuất, nghiên cứu khoa học... với tư thế không thể cản bước, khiến cho người ta phải ý thức được rằng nếu không có ngôn ngữ số tinh xác của toán học, thì thế giới sinh tồn của loài người sẽ trở nên không chịu nổi giống như không có nước, không có điện vậy.

Từ khóa: *Toán học;Cách mạng số; Kỹ thuật số.*

Vào năm 1976 từ trường đại học Ilinoi ở nước Mỹ đã truyền đi một nguồn tin làm kinh động mọi người. Hai nhà toán học Abel và Hakan đã chứng minh được một bài toán mà đã hơn 100 năm qua chưa có lời giải: “Dự đoán bốn màu”. Điều hết sức thú vị là họ đã dựa vào máy tính để chứng minh dự đoán này.

Chúng ta biết máy tính có điểm mạnh là có thể lặp đi, lặp lại các thao tác đơn giản, nếu đem biến các chứng minh toán học phức tạp thành các thao tác máy móc rồi giao cho máy tính thì sẽ giải phóng cho các nhà toán học khỏi nhiều công việc rắc rối.

Nhà toán học Giáo sư Ngô Tuấn của Trung Quốc cùng các cộng sự đã nghiên cứu cách cơ giới hoá các chứng minh định lí toán học. Trên cơ sở của hình học giải tích ông đã đại số hoá các định lí, tiến hành cơ giới hoá để máy tính có thể tiếp nhận giải quyết, chứng minh các định lí trong hình học phẳng.

Đến năm 1978, Ngô Tuấn cùng các đồng nghiệp đã hoàn thành việc chứng minh các định lí

hình học sơ cấp cũng như nhiều bài toán hình học vi phân bằng chứng minh cơ giới hoá bằng máy tính điện tử. Từ đó đã mở ra con đường dùng máy tính điện tử để chứng minh nhiều định lí toán học phức tạp.

Như vậy nhờ một công việc chưa có tiền lệ, nghiên cứu thành công mà đã có thể dùng máy tính để thay thế cho lao động trí não cực nhọc giải quyết một bộ phận công tác trong toán học, mở ra con đường mới cho toán học phát triển.

Từ khoá: *Máy tính và định lí toán học.*

Chúng ta biết dùng toán học có thể mô phỏng nhiều hiện tượng trong đời sống. Thế nhưng liệu có thể dùng toán học để mô phỏng chiến tranh không?

Đánh cờ tướng là hình thức mô phỏng chiến tranh sớm nhất. Không kể là môn cờ tướng hay môn cờ vua (cờ quốc tế) người chơi phải sử dụng các quân cờ đại diện cho vua, tướng, xe, mã, tốt và tiến hành các cuộc truy sát các quân cờ trên bàn cờ. Vào năm 1996, ở Mỹ người ta đã dùng máy tính cỡ lớn giành vô địch cờ vua thế giới. Như vậy máy tính đã dựa vào quy luật "chiến tranh" trong môn cờ vua đã giành phần thắng trong cuộc đấu cờ với người.

Một kiểu mô phỏng các hoạt động quân sự thường dùng là "diễn tập" thế nhưng việc dùng người thật, súng thật trong diễn tập phải tiêu tốn nhiều tài lực, nhân lực mà cũng chỉ là làm giả, không thể để xảy ra "thương vong" thật.



Vào những năm 70 của thế kỉ XV, trong cuộc chiến tranh Đức - Phổ, người ta đã dùng sa bàn để mô phỏng. Sa bàn chỉ là để cung cấp địa hình, bối cảnh và việc bố trí binh lực của đôi bên tham chiến. Các chỉ huy của đôi bên có thể thảo luận dựa vào mô hình mà không thể có "quá trình chiến tranh" thực. Không có cách nào để thể hiện các thương vong, các hư hao về vũ khí cũng như các biến đổi trên chiến trường. Từ lâu các nhà quân sự hi vọng có thể có mô hình chiến trường một kiểu "phòng thực nghiệm quân sự". Từ năm 1950 trở về sau, việc dùng máy tính mô phỏng các hoạt động quân sự đã biến hi vọng thành hiện thực.

Các bước mô phỏng chiến tranh được thực hiện theo các bước:

1. Các nhà quân sự chế định kế hoạch chiến đấu, các nhà toán học dựa vào đó tạo thành các mô hình.

2. Dựa vào các số liệu: số người, vũ khí, đạn dược hậu cần.

3. Theo hiệu lệnh chỉ huy của đôi bên tiến hành điều khiển, tính toán quan sát các kết quả tính toán.

4. Phân tích các kết quả, đưa ra các ý kiến cải tiến.

Nhiều bạn nhỏ đã chơi trò "đánh trận" trên máy tính. Cách soạn thảo các phần mềm các trò chơi này có phần nào giống với các mô phỏng quân sự.

Vào năm 1944, Norman và Oramey trong khi thiết kế bom nguyên tử đã lợi dụng máy tính để mô phỏng cách gây tán xạ các nơtron, mở đầu cho việc dùng máy tính điện tử trong kĩ thuật mô phỏng trong các nghiên cứu quân sự. Mọi người đều biết ngày nay các vụ thử bom hạt nhân đã bị cấm trên toàn thế giới, nên muốn tiến hành nghiên cứu, phân tích vũ khí nguyên tử người ta chỉ có cách dùng máy tính điện tử. Hiện nay, từ việc thiết kế ô tô, đến việc phóng tên lửa, từ việc luyện thép cho đến việc điều tra phân tích môi trường đều có thể dùng máy tính để mô phỏng thay cho một phần công tác thực nghiệm. Ngày nay việc dùng các máy tính để thiết kế các loại máy bay siêu tốc, siêu nặng đã giảm bớt thời gian, chu kì nghiên cứu. Kĩ thuật tính toán, lí thuyết chỉ đạo và thực nghiệm khoa học đã trở thành ba loại phương pháp khoa học trong nghiên cứu khoa học.

Từ khoá: *Toán học tính toán; Mô phỏng.*

Trên đây chúng ta vừa nói đến việc dùng tính toán toán học thay cho diễn tập quân sự và thiết kế các loại sản phẩm. Tất cả các công việc trên không thể tách khỏi việc xây dựng các “mô hình toán học”. Chúng ta đều biết mô hình là một cách mô phỏng các sự vật khách quan. Tuy nhiên đó không phải là cách mô phỏng đơn giản, các mô phỏng phải gây được sự hứng thú ở chúng ta. Như với các mô hình máy bay trình bày ở phòng triển lãm thì hình thức là điểm quan trọng nhất. Tuy nhiên với các mô hình tham gia cuộc thi mô hình máy bay thì hình thức bên ngoài không phải là điều quan trọng nữa mà chủ yếu là tính năng bay của mô hình. Mô hình còn phải có một thuộc tính trừu tượng nào đó. Ví dụ một tấm bản đồ địa chất và một tấm bản đồ giao thông của cùng một khu vực, hai tấm bản đồ không hề phản ánh cùng một nội dung mà là có nội dung hoàn toàn khác nhau.

Trên đây chúng ta đã đề cập đến mô hình của các vật thực, thế thì mô hình toán học là gì? Theo như tên gọi, mô hình toán học là dùng phương pháp toán học để cấu trúc nên mô hình. Đó cũng chính là dùng toán học để biểu đạt các vấn đề thực tế phức tạp. Mô hình chính là cách giản hoá các vấn đề thực tế. Mô hình các vật thực là như vậy mà mô hình toán học cũng là như vậy. Nếu không dùng cách giản hoá mà muốn dùng toán học để biểu đạt rõ ràng một vấn đề thực tế phức tạp là không có khả năng. Ví dụ với một đoàn tàu ta có thể thông qua tốc độ chuyển động giả định để lập lộ trình cho tàu chạy hoặc tính thời gian để tàu thực hiện thời gian chạy hết lộ trình. Làm như vậy chúng ta đã giản hoá tốc độ chuyển động của tàu, bởi vì trong suốt hành trình, tàu không thể luôn giữ một tốc độ xác định. Thậm chí khi tính toán ta cũng không hề tính toán đến tốc độ khởi động chậm ban đầu mà xem nó như chuyển động với tốc độ lớn ngay từ ban đầu.

Tuy nhiên, trong mô hình toán học cũng có sự giản hoá, thế nhưng cùng một vấn đề có thể có mức giản hoá khác nhau, có loại mô hình thô sơ, có loại mô hình phức tạp.

Ví dụ với mô hình tăng trưởng nhân khẩu. Theo như mô hình của giáo sĩ Malthus (năm 1798) thì giả sử số người sinh là *b* và số người chết là *d* thì số nhân khẩu gia tăng tương đối r sẽ là $r = b - d$ cũng là một hằng số. Giả sử lúc ban đầu ($t = 0$) số nhân khẩu là N_0 thì sau thời gian t, số nhân khẩu ở thời điểm đó Nt sẽ là:

$$N_t = N_0 . e^{rt}$$

Hay nói cách khác, nhân khẩu tăng theo cấp số nhân. Dựa vào các số liệu thống kê, người ta thấy, từ thế kỉ XIX về trước, ở một số địa phương, thì sự tăng dân số phù hợp với mô hình Malthus, còn đại đa số các địa phương khác khá xa mô hình này. Do đó mô hình Malthus hoàn toàn không xét đến việc khi nhân khẩu tăng thì hoàn cảnh sinh hoạt,

tài nguyên thiên nhiên sẽ hạn chế việc tăng trưởng nhân khẩu. Khi tăng số nhân khẩu thì thực phẩm giảm, điều kiện cư trú, các vấn đề ô nhiễm môi trường làm cho tỉ lệ sinh giảm và tỉ lệ chết tăng.

Một mô hình khác là mô hình Logistic, nếu gọi r là hàm số của số nhân khẩu N ta có mô hình:

$$r(N) = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

Theo mô hình Logistic, sự tăng nhân khẩu có ràng buộc hằng số ổn định K. Về mô hình này có điểm đáng chú ý là phù hợp thực tế, phù hợp với các số liệu thống kê. Vì vậy mô hình này đã được ứng dụng rộng rãi trong việc dự đoán sự phát triển số lượng các sinh vật.

Vậy chẳng phải càng xem xét kĩ lưỡng thì mô hình càng tốt hơn chăng? Điều đó cũng chưa chắc. Khi càng xem xét kĩ lưỡng, càng tiếp cận với tình hình thực tế, mô hình càng phức tạp thì việc sử dụng mô hình càng khó khăn và sẽ không thể được áp dụng một cách thích hợp. Vì vậy một mô hình toán học tốt, cần phải phản ánh chuẩn xác tình hình thực tế, nhưng không nên quá phức tạp.

Việc xây dựng được một mô hình toán học thích hợp sẽ đem lại cho công tác hàng ngày của chúng ta được thuận tiện hơn. Muốn xây dựng một mô hình toán học tốt cần phải chuẩn bị cơ sở toán học tốt cho mô hình, cần phải đi sâu để giải thích. Mô hình toán học là một tri thức đa dạng, là chỗ giao lưu của nhiều ngành.

Từ khoá: *Mô hình toán học.*

Thông thường khi nói đến phép toán là nói đến phương pháp giải toán. Khi cần giải một bài toán có thể dùng nhiều loại phép toán khác nhau. Sau đây ta xét một ví dụ đơn giản.

Có n số a_1, a_2...,a_n cần tìm số lớn nhất trong các số đó. Có hai cách làm:

Phương pháp 1: Theo cách sắp xếp các số thứ tự, bắt đầu so sánh số a_1 với $n - 1$ số còn lại, nếu phát hiện thấy có một số lớn hơn a_1 thì rõ ràng a1 không phải là số lớn nhất. Lại lấy số a_2 so với $n - 1$ số còn lại....cứ thế tiến hành cuối cùng sẽ tìm được số lớn nhất.

Phương pháp 2: Trước hết đem a_1 so với a_2 , nếu $a_1 > a_2$, ta lại đem so a_1 với a_3 , không cần phải so sánh a_2 với a_3 . Khi so a_1 với a_2 hoặc a_2 so với a_3 , ta tìm được số lớn nhất, trong ba số đem so với a_4 . Trong khi so sánh hai số ắt tìm được một số lớn hơn trong hai số đó và cuối cùng sẽ tìm được số lớn nhất trong các số đã đem so. Vì vậy chỉ cần $n - 1$ lần so là có thể tìm được số lớn nhất trong các số đã xét.

Trong hai phương pháp thì phương pháp nào hợp lí hơn? Rõ ràng là phương pháp hai. Với phương pháp hai, số lần tiến hành so sánh các số ít hơn phương pháp một. Với số n lớn thì thực hiện theo phương pháp 2 sẽ thu được kết quả nhanh hơn. Do vậy phép toán có thể tốt có thể xấu. Do đó khi thiết kế các phép toán để giải quyết một vấn đề cụ thể, người ta hi vọng tìm được một phép toán thực hiện bài toán nhanh nhất. Thế làm thế nào để đánh giá được phép toán là tốt hay xấu?

Một trong các tiêu chuẩn để đánh giá phép toán là tốt hay xấu là khi máy tính chấp hành phép toán để giải quyết một vấn đề nào đó thì tiêu phí thời gian dài hay ngắn. Trong ví dụ nêu trên, với số n rất lớn hiển nhiên dùng phương pháp 2 thời gian sử dụng để giải bài toán sẽ ngắn hơn khi dùng phương pháp 1. Nói chung khi chọn phép toán để giải quyết một vấn đề nào đó, căn cứ đầu tiên phải cân nhắc là quy mô. Ở ví dụ nêu trên, quy mô của bài toán là *n*. Thời gian sử dụng phép toán để giải bài toán được quyết định do *n*. Với phương pháp 2, thời gian tiêu phí được đánh giá bằng $n - 1$.

Thông thường mục tiêu tìm kiếm là chọn các phép toán có nhiều số hạng. Với các phép toán nhiều số hạng, thời gian tiêu phí cho quy mô n là một hạng thức nhiều số hạng. So với phép toán theo chỉ số (thời gian tiêu chí cho quy mô được biểu diễn theo chỉ số) thì phép toán theo hạng thức nhiều số hạng tiết kiệm thời gian hơn, trong đó *n* biểu diễn quy mô của bài toán:

Thời gian tiêu tốn	n = 2	n = 4	n = 10	n = 30
n^5(phép toán nhiều số hạng)	32	1024	10^5	$2,4.10^7$
2^n(phép toán theo chỉ số)	4	16	1024	khoảng $1,07 \times 10^9$

Từ đó có thể thấy khi *n* càng lớn thì tiêu tốn thời gian của phép toán theo chỉ số càng nhiều. Cho dù tốc độ của máy tính rất lớn (ví dụ cỡ một tỉ phép tính/giây) thì hàm chỉ số đã tăng với tốc độ kinh người khi *n* tăng và máy tính sẽ không đảm nhiệm nổi. Giả sử chúng ta sử dụng máy tính có tốc độ 100.000 phép tính/giây thì với phép toán 2^{30} cần thời gian làm việc 104 giây tức khoảng 3 giờ. Với thời gian như vậy còn có thể chấp nhận được. Nhưng với phép toán hao phí thời gian cỡ 2^{150}, 2^{1000} thì sẽ ra sao? Rõ ràng là các máy tính sẽ bó tay.

Do máy tính không thể giải quyết các vấn đề có cơ sở dữ liệu quá lớn, nên khi giải quyết các bài toán phức tạp cần tìm các phép toán (hay thuật toán) mà máy tính có thể có khả năng tiếp thu được. Đó là lí do tại sao ta cần tìm các phép toán (thuật toán) nhiều số hạng.

Từ khoá: *Phép toán (thuật toán); Phép toán hạng thức nhiều số hạng.*

Mọi tri thức khoa học đều nhằm phát hiện, phát biểu, dự kiến các quy luật phát triển của sự vật. Các tính toán toán học và phương pháp suy luận là phương tiện chủ yếu để phát hiện các tri thức khoa học. Ví dụ chúng ta có thể dùng phương pháp toán học để dự báo chính xác nhật thực, nguyệt thực, Mặt Trời mọc, Mặt Trời lặn, sự thay đổi bốn mùa; dùng phương pháp toán học để dự báo phát triển dân số của một nước; thậm chí dùng phương pháp mô phỏng toán học để thiết kế các loại ô tô, máy bay...

Liệu có phải phương pháp toán học là tất cả, có thể dùng phương pháp toán học thay cho thực nghiệm khoa học?

Rõ ràng không phải là như vậy.

Trước hết phương pháp toán học phải dựa vào thực nghiệm và kết quả quan sát. Phương pháp toán học được sử dụng để giải thích bản chất sự vật, mà để giải thích bản chất sự vật, phải dựa vào kết quả quan sát và thực nghiệm. Ví dụ để dự báo chính xác nhật thực, nguyệt thực, Mặt Trời mọc, Mặt Trời lặn, sự thay đổi bốn mùa, chúng ta phải biết quy luật chuyển động của Trái Đất quanh Mặt Trời, quy luật chuyển động cũng như quỹ đạo chuyển động của Mặt Trăng quanh Trái Đất. Tất cả những cái đó phải dựa vào quan trắc thiên văn. Hay như muốn dùng toán học để thiết kế các loại ô tô, máy bay mới trước hết phải dựa vào số lớn các tri thức đã được tích luỹ trong quá khứ, sau đó toán học hoá các tri thức đã được tích luỹ (tức xây dựng "mô hình toán học") sau đó mới dùng máy tính kiểm nghiệm và thiết kế các tính năng mới.

Mặt khác các kết luận của phương pháp toán học cần phải được kiểm nghiệm thông qua thực tiễn. Trong khi xây dựng mô hình, chính là quá trình lí tưởng hoá hiện tượng khách quan, thường có thể bỏ qua các nhân tố thứ yếu. Do đó kết quả tính toán suy luận toán học có thể có sai lệch với tình hình thực tế. Liệu các sai lệch này có nằm trong phạm vi cho phép hay không? Liệu trong các nhân tố bỏ qua có phải là nhân tố chủ yếu và có thể dẫn đến sự phủ định các kết quả suy luận toán học hay không? Để đánh giá đúng sai chỉ có thể kiểm nghiệm thông qua thực tiễn. Ví dụ dùng

phương pháp toán học để thiết kế một loại sản phẩm, thế nhưng sản phẩm có đáp ứng được yêu cầu mong muốn hay không thì phải qua kiểm nghiệm thực tiễn. Không thể tưởng tượng được sự việc một loại máy bay thiết kế qua mô phỏng toán học không qua các kiểm nghiệm cục bộ, kiểm nghiệm toàn thể, bay thử v.v.. lại dám đem sử dụng để chở khách.

Ngoài ra trong nhiều lĩnh vực, phương pháp toán học còn đang ở bước đóng vai trò phụ trợ. Đó là do trong các lĩnh vực này chưa có các giải thích chính xác bản chất sự vật khách quan, để có thể từ đó lập được mô hình toán học chính xác, để dựa vào đó tiến hành quan sát thực hiện các thực nghiệm. Mặt khác có thể trong phương pháp toán học vẫn còn nhiều hạn chế, do đó chưa có được giải pháp hữu hiệu. Có nhiều vấn đề có thể giải quyết được trên lí thuyết, nhưng trước mắt còn khó thực hiện được các tính toán cụ thể trên máy tính v.v... Ví dụ do thời tiết chịu ảnh hưởng nhiều nhân tố còn chưa biết rõ nên trước mắt việc dự báo chính xác thời tiết còn là vấn đề khá khó. (Nên dựa vào các điều kiện còn thiếu sót nhiều để lập các mô hình toán học, trước mắt máy tính chỉ đưa được các kết quả còn nhiều lệch lạc so với thực tế). Vì vậy người ta đã phải sử dụng nhiều biện pháp: bố trí các mạng lưới trạm khí tượng dày đặc như mạng nhện. Các số liệu quan trắc sẽ được so sánh, đánh giá, tham khảo các tư liệu lịch sử, sử dụng các bóng thám không khí tượng, các vệ tinh khí tượng để quan sát, giám sát sự thay đổi của bầu trời sau đó mới dùng phương pháp toán học tính toán để đưa ra các dự báo khí tượng (như thế không trách người ta thường than phiền dự báo khí tượng không chính xác). Tương tự vai trò của toán học trong dự báo động đất còn quá nhỏ bé.

Ngoài ra, với các hiện tượng xã hội phức tạp thì mô hình toán học vẫn còn là khá thô xơ, việc toán học hoá các vấn đề xã hội còn là một vấn đề khá khó. Ngay cả dùng phương pháp toán học để khống chế dân số cho một quốc gia khi đưa ra yêu cầu: "Mỗi cặp vợ chồng chỉ có hai con" thì để thực hiện được yêu cầu này là khá khó và vì vậy các dự báo là khó chính xác...

Từ khoá: *Phương pháp toán học; Mô hình toán học.*

Nói đến mật mã tự nhiên mọi người liên tưởng đến các hoạt động chính trị, quân sự, nghĩ đến các nhân viên điệp báo. Sự thực thì ngày nay mật mã đã có mối liên hệ hết sức chặt chẽ với cuộc sống hàng ngày. Ví dụ bạn đến ngân hàng để gửi hoặc lĩnh tiền bạn phải quy định mật mã. Các đơn vị muốn lưu giữ các văn kiện quan trọng cần phải có từ đóng mở bằng mật mã. Các mạng lưới máy tính của ngân hàng cần có hệ thống mật mã để gìn giữ an toàn các số liệu.

Do việc sử dụng các máy tính ngày càng rộng rãi, phát triển từ máy, mạng và máy chủ, đối với việc giữ gìn an toàn số liệu đã dần dần vượt xa khái niệm bảo mật theo truyền thống, hình thành loại thuật toán mật mã và quản lí khoá mật mã kết hợp thành một ngành học hoàn toàn mới: mật mã học. Mật mã học hiện đại khác với mật mã truyền thống là có giá thành thấp nhất và hiệu suất cao nhất, dùng phương pháp xử lí số liệu điện tử (EDP = electronic data processing) là phương pháp thu thập thông tin kết hợp kĩ thuật số hoá nên có tính bảo hộ cao.

Vấn đề cơ bản của mật mã học là thiết kế một cách chuyển đổi "lời thường" (có thể hiểu được như bình thường) thành các "mật ngữ" (không hiểu được theo cách thông thường). Để hiểu các mật ngữ phải qua cách phân tích theo quy tắc ngược với khi tiến hành mã hoá mới khôi phục lại thông tin ban đầu. Để thực hiện phương pháp biến đổi phải nhờ hệ thống dịch mật mã. Để dịch mật mã người ta cần một bản mã gốc hoặc tự điển bên trong có thuyết minh, làm thế nào để phiên dịch các chữ, lời thành câu, thành các nhóm mật ngữ. Hệ thống mật mã có hai bộ phận cơ bản: một là thuật toán mật mã, đó là quá trình hoặc là một nhóm quy tắc, một số bước đi; hai là nhóm khoá mật mã do người sử dụng mật mã là các chữ số bí mật, cách sắp xếp thứ tự.

Thuật toán mật mã là nhóm các phép biến đổi, cách biến đổi được quy định dựa vào khoá mật mã. Mỗi cách biến đổi có thể biến đổi từ lời nói thường sang mật ngữ được gọi là sự mã hoá. Mỗi phép đổi có cách biến đổi ngược duy nhất, phép biến đổi ngược này được gọi là sự giải mã. Để thực hiện việc giải mã cũng cần một khoá giải mã tương ứng. Toàn bộ quá trình trên ta có thể dùng ngôn ngữ toán học để mô tả. Cho P đại diện tập hợp các phần tử của lời nói thường $P = \{P_1,$

P_2,...P_n}; còn C là tập hợp các phần tử của mật ngữ $C = \{C_1, C_2, ...C_n\}$. Trong quá trình mã hoá ta dùng quy tắc *E* để thuyết minh. Với mỗi phần tử *p* của P, ta có thể tìm phần tử đối ứng trong *C* là *c*, ta có $c = E(p)$. *E* là hàm biến đổi. Tập hợp *P* là hàm khu vực, tập hợp C là hàm khu vực liên hợp.

Trong những năm 70 của thế kỉ XX đã có sự hoàn thiện trong quy trình mã hoá. Ngày 15-1-1977 hiệp hội tiêu chuẩn hoá của nước Mỹ đã đưa ra tiêu chuẩn quốc gia về mật mã cho nước Mỹ.

Từ khoá: *Mật mã; Mã hoá; Giải mã; Khoá mật mã.*

201. Vì sao phương pháp thay thế dần ngày càng tỏ ra quan trọng?

Thế nào là phương pháp thay thế dần? Trước hết ta giải phương trình $x^2= 2$. Thế chẳng phải nghiệm của phương trình là √2 sao? Không sai. Thế nhưng √2 bằng bao nhiêu, có thể biểu diễn bằng một số lẻ thập phân không?

√2 là một số vô tỉ. Chúng ta hi vọng không cần phép tính khai căn cũng có thể tìm được giá trị gần đúng của √2 dưới dạng một số lẻ thập phân có độ chính xác bao nhiêu cũng được. Ta biến đổi $x^2 = 2$ thành $x = {}^1/_2\ (x + {}^2/_x)$. Ta làm phép tính ước lượng chọn $x_1 = 1$. Đưa vào biểu thức và tính $x_2 = {}^1/_2(1 + {}^2/_1)$. Lại đưa x_2 thay vào biểu thức và tính $x_3 = {}^1/_2(1{,}5 + {}^2/_{1,5}) \approx 1{,}41666$

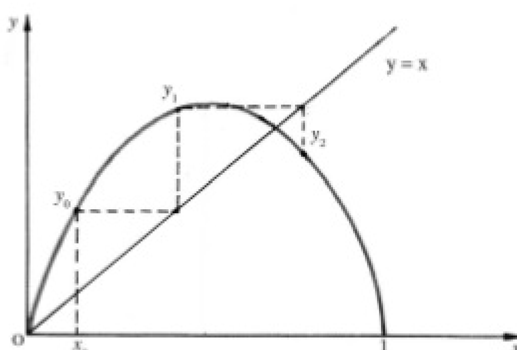
Ta có thể thay dần các giá trị x_n vào biểu thức và tính $x_{n+1} = {}^1/_2(x_n + {}^2/_x n)$; $n = 1,2,3,\ldots,n$ tạo thành một dãy số là các giá trị gần đúng của √2. Từ tính toán có thể tìm được $x_4 = 1{,}414215686$, $x5 = 1{,}414213562$. Giá trị của x_5 đạt đến độ chính xác của số lẻ thứ 9, so với phương pháp khai căn ở đây các tính toán thực hiện dễ dàng và nhanh chóng hơn. Như vậy ở đây đã đưa số x_n vào công thức để tính giá trị số x_{n+1}, lại đưa số x_{n+2} thay vào công thức để tính x_{n+2}...và có thể tiếp tục các giá trị x_n tiếp sau, từ đó nhận được dãy số x_1, x^2, ..,x_3. Ở đây để tính giá trị x_n ta đã đưa giá trị $x = x_1$ vào hàm $f(x)$ thay thế dần vào $f(x)$ và $x_{n+1} = f(x)$ n =1,2,3...n đến khi đạt được giá trị có độ chính xác cần thiết. Đấy chính là phương pháp thay thế dần.

Xem ra thì phương pháp thay thế dần có thể có chút ít phiền phức khi tính toán. Thay thế, rồi lại tính, cứ tiếp tục liệu có thể tạo điều kiện xuất hiện tính sai chăng? Thực ra ngày nay với sự xuất hiện máy tính có tốc độ tính nhanh và chính xác nên có thể áp dụng để giải các phương trình phức tạp hơn phương trình $x^2= 2$ nhiều mà không hề gặp khó khăn gì, vì vậy phương pháp thay thế dần có nhiều lợi ích để giải quyết nhiều vấn đề thực tế.

Từ khoá: *Phương pháp thay thế dần.*

202. Vì sao phương pháp thay thế dần lại cho một con số có tính ngẫu nhiên?

Hình vẽ ở bên dưới là một hàm bậc hai $y = ax(1 - x)$; $0 < x < 1$, a là một tham số. Với $x = {}^1/_2$ta nhận được cực trị của đường parabon. Với mỗi giá trị $0 < x < 1$, ta sẽ nhận được một điểm y duy nhất trên đường parabon. Với một số x_0 $0 < x_0 < 1$ ta nhận được số y_0. Lại đem thay y_0 vào hàm bậc hai ta được giá trị mới y_1. Lại đem y_1 thay vào hàm, ta lại được y_2, lại tiếp tục đưa y_2 vào thay... ta sẽ thu được dãy số y_0, y_1, y_2....quá trình này trong toán học gọi là phương pháp thay dần.



Xuất phát từ hàm bậc hai, ta chọn số x_0 bất kì ($0 < x_0 < 1$) làm giá trị thay thế ban đầu, với các tham số a khác nhau, ta sẽ nhận được các kết quả đáng chú ý.

Khi chọn $a = 2$ và $x_0 = 0,2$ tiến hành việc thay thế dần, ta sẽ nhận được dãy số y_i là 0,18; 0,2952; 0,4161140; 0,485926; 0,499604; 0,50000. Cuối cùng dãy số sẽ dừng lại ở con số 0,50000.

Khi $a = 3,2$ và chọn giá trị ban đầu là, $x_0 = 0,2$ ta sẽ nhận được dãy số: 0,512; 0,799539; 0,512840; 0,7994690; 0,530190; 0,7994580; 0,5130400; 0,7994560; 0,51304403; 0,7994560; 0,5130440; 0,7994560; 0,5130440..., dãy trị số thay thế dần cuối cùng sẽ dừng lại ở hai số: 0,7884560 và 0,5130440 chúng sẽ thay phiên nhau xuất hiện.

Với $a = 3,5$ và giá trị ban đầu $x_0 = 0,2$ tiến hành thay thế dần đến 30 lần cuối cùng xuất hiện các số 0,3828200; 0,8269410; 0,500840; 0,8749970, từ đó 4 số này thay nhau xuất hiện. Khi cho a tăng dần thì cuối cùng sẽ xuất hiện 8 số thay nhau xuất hiện khi tiến hành cuộc thay dần tiếp tục,...rồi lại xuất hiện 16 số thay nhau xuất hiện...

Nhưng khi cho a tăng đến $a > 3,57$ ví dụ $a = 3,58$ thì dãy số do kết quả các thay thế dần là: 0,572800; 0,8760270; 0,388020; 0,8507340; 0,4546100; 0,8876240; 0,3570966; 0,8218190; 0,5240630; 0,892927; 0,3422780; 0,8059430... và hiện tượng quy luật mất hẳn, người ta không nhận được bất kì giá trị nào được lặp lại, không hề có tính quy luật, trái lại các số xuất hiện đều có tính ngẫu nhiên. Các bạn thử tiếp tục thay thế sẽ thấy.

Xuất phát từ một hàm bậc hai, chọn các tham số a và tiến hành phép thay thế dần ta sẽ nhận được dãy số không lường trước được, làm mọi người khó tin nhưng đó là sự thực có thể kiểm nghiệm bằng máy tính. Đó là một đặc tính cố hữu của các hệ phi tuyến, được gọi là tính ngẫu nhiên nội tại. Tính ngẫu nhiên nội tại là đặc trưng của một ngành khoa học mới: lí luận về trạng thái hỗn độn.

Tính xác định có bao hàm tính ngẫu nhiên. Ở đây xuất hiện quy luật thống nhất giữa các mặt đối lập. Do phép thay thế dần có bao hàm các sự kiện ngoài sự tiên liệu. Sự xuất hiện các số ngẫu nhiên giúp người ta nhận thức sâu hơn về tự nhiên.

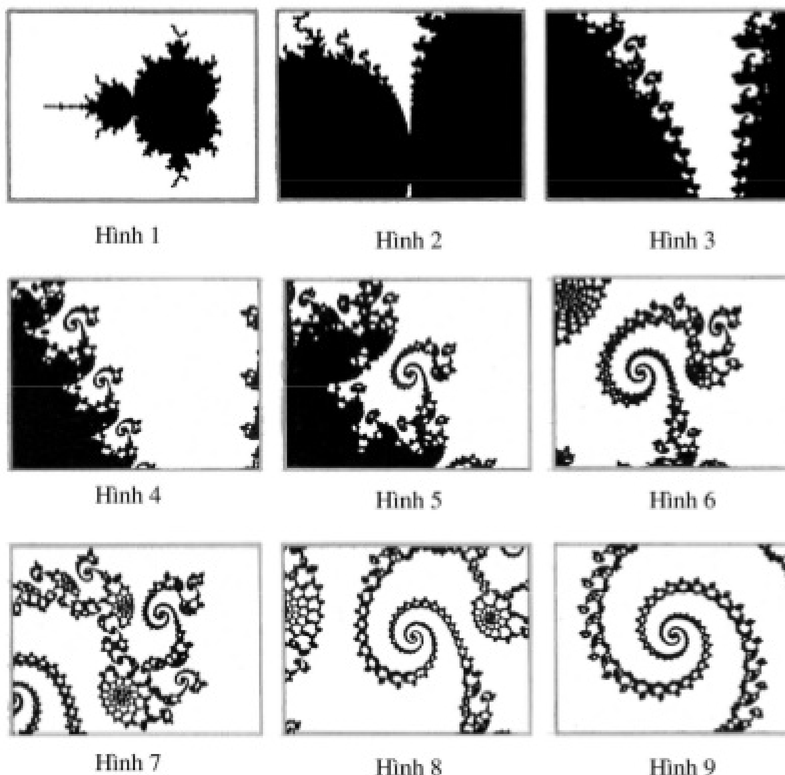
Từ khoá: *Sự thay thế dần; Số ngẫu nhiên.*

203. Vì sao dùng phương pháp thay thế dần ta lại nhận được các hình vẽ có hoạ tiết đẹp?

Trước hết ta xét chín hình vẽ. Bạn thấy có điều gì đáng nói không? Sự thực chín hình vẽ này chỉ là chụp lại từ một hình vẽ. Hình 1 là bức toàn cảnh. Từ hình 2 trở đi là những hình phóng đại một bộ phận của hình trước. Hình 9 là hình có độ phóng đại đến 300 triệu lần.

Sau khi xem 9 bức hình này, ta có thể tin rằng mỗi người sẽ có cảm nhận riêng về cái đẹp. Trên hình 1 ta chỉ thấy một "đám đen ngòm". Sau khi phóng đại dần dần, hình vẽ bắt đầu xuất hiện bộ mặt thật của nó, dần dần mở rộng được tầm nhìn sâu vào sự vật. Đó là sự xuất hiện dần các nét tinh xảo ngoài ý nghĩ của người ta.

Thế có phải hình vẽ này do một danh hoạ nào đó vẽ ra. Nói ra các bạn lại không tin. Hình vẽ do một nhà toán học là Benoit Mandelbrot dùng phương pháp thay thế dần và thiết kế trên máy tính. Trong toán học người ta gọi đó là tập Mandelbrot, trên thực tế có cấu trúc khá đơn giản. Tư tưởng chủ yếu của tập này là thay thế dần. Khác với phương pháp thay thế trước, ở đây dùng phương pháp thay thế điểm.



Ta xét điểm *A* (toạ độ *c, d*). Điểm ban đầu có toạ độ số (a_n, b_n), ta tiến hành quá trình thay thế để nhận được điểm (a_{n+1}, b_{n+1}). Công thức thay thế sẽ là hệ hai phương trình hai ẩn:

$$a_{n+1} = a_n^2 - b_n^2 + c$$

$$b_{n+1} = 2a_n b_n + d$$

Qua việc thay thế ta sẽ được một hệ các điểm có đường biên, qua cách thay thế sẽ chuyển điểm *A (c, d)* ban đầu thành điểm A có màu trắng. Bằng cách đó có thể chuyển đổi bất kì điểm nào trên hình phẳng thành các điểm tương ứng. Dựa vào phương pháp miêu tả ta có thể vẽ ra nhiều hình vẽ phong phú và tạo được các hình vẽ có hoạ tiết đẹp đẽ.

Như vậy từ ngành toán học nghiêm túc lại tạo ra các cảm hứng đầy tính nghệ thuật. Việc cảm nhận vẽ đẹp các tập Mandelbrot làm chúng ta nhận rõ được ma lực phi phàm của toán học.

Từ khoá: *Phương pháp thay thế; Tập Mandelbrot.*

204. "Toán học mờ" có mơ hồ không?

Trong cuộc sống hằng ngày ta thường gặp nhiều khái niệm mơ hồ, ví như khi nấu cơm đổ nước nhiều hay ít, khi giặt quần áo thêm nhiều hay ít bột giặt. Các giới hạn ít nhiều này thật không rõ ràng, thật mơ hồ. Với kinh nghiệm người ta có thể phân định được mức độ nào đó nhưng khi xử lí bằng máy tính sẽ gặp không ít khó khăn. Vì vậy tìm công cụ toán học thích hợp cho việc xử lí các sự việc mơ hồ tự nhiên trở thành điểm nóng của các nghiên cứu toán học.

Từ năm 1937, Black đã từng bàn đến hiện tượng mơ hồ trên phương diện lôgic. Vào năm 1951, trong một luận văn, một người Pháp đã từng đưa ra thuật ngữ "tập hợp mơ hồ" hay "tập mờ". Năm

1965, giáo sư Zadeh thuộc phân hiệu đại học Berkley ở bang California nước Mỹ đã công bố luận văn về "tập mờ". Từ đó một ngành toán học mới: toán học mơ hồ hay toán học mờ bắt đầu phát triển mạnh mẽ.

Toán học mờ là ngành khoa học dùng công cụ toán học để nghiên cứu các sự vật mơ hồ. Toán học là ngành khoa học chính xác, còn toán học mờ không hề giảm đi tí nào tính chính xác của toán học. Toán học mờ thử dùng tính định lượng, tính chính xác để xử lí tính mơ hồ, mở rộng phạm vi ứng dụng của toán học. Tập hợp mờ là khái niệm cơ bản của toán học mờ. Điểm khác biệt của các tập hợp mờ (hay còn gọi là tập mờ) là các phần tử của tập hợp mờ có tính chất mơ hồ ở mức độ nào đó. Trên cơ sở của tập mờ ta có thể thảo luận về quan hệ mờ, ma trận mờ và số mờ.

Toán học mờ phát triển dựa vào cơ sở của toán học truyền thống. Toán học mờ không phải là toán học truyền thống nhưng có mối liên hệ với toán học truyền thống. Dưới đây ta sẽ xem xét một ví dụ.

Trong hình học có định nghĩa về vòng tròn "Hình tròn là tập hợp các điểm trên mặt phẳng có khoảng cách không thay đổi tới một điểm cố định trong vòng tròn". Thế nhưng trong cuộc sống hằng ngày tìm được một hình tròn hoàn toàn phù hợp với định nghĩa toán học là rất khó. Người ta thường nói "Mặt trăng tròn", "Quả trứng tròn", "Gương mặt tròn" v.v... đều là các khái niệm mơ hồ. Nếu có ai đó đưa cho bạn một tấm ảnh trong đó có ảnh của nhiều người, người ta yêu cầu bạn chọn trong số đó một gương mặt tròn nhất. Nếu chỉ dùng trực giác thật khó thực hiện được. Chỉ có dùng máy tính kết hợp với các dụng cụ đo đạc may ra có thể hoàn thành được.

Trong toán học truyền thống có định lí: Với các hình có cùng chu vi thì hình tròn có diện tích lớn nhất. Ta biết công thức tính diện tích hình tròn là $S = \pi R^2$, công thức tính đường chu vi là $l = 2\pi R$ (R là bán kính của hình tròn). Ta tính tỉ số của diện tích hình tròn với bình phương đường chu vi hình tròn sẽ là $S/l^2 = 1/4\pi$. Với các hình khác thì tỉ số giữa diện tích và bình phương chu vi sẽ nhỏ hơn hằng số này.

Với một hình tiếp cận với vòng tròn thì tỉ số S/l^2 sẽ tiến dần đến số $1/4\pi$. Như vậy ta có thể dùng $4\pi S/l^2$ để biểu diễn mức độ tròn của một hình. Bây giờ với các hình người trong tấm ảnh ta chỉ cần đo diện tích và đường chu vi của các gương mặt ta có thể đánh giá mức độ tròn của các gương mặt theo giá trị tỉ số $4\pi S/l^2$. Các tỉ số này sẽ có giá trị trong khoảng 0 - 1. Nếu tỉ số càng gần với 1 thì gương mặt càng tròn. Dùng phương pháp này máy tính có thể chọn được gương mặt tròn nhất trong các gương mặt trong tấm ảnh.

Toán học mờ đã đưa ra phương pháp miêu tả định lượng cho ngôn ngữ tự nhiên để ngôn ngữ tự nhiên chuyển hoá thành ngôn ngữ máy, nhờ đó nâng cao độ linh hoạt của máy tính. Toán học mờ kết hợp với máy tính đã có ứng dụng rộng rãi và đạt nhiều kết quả. Ví dụ Pabis và các cộng sự ở nước Anh đã dùng toán học mờ để chế tạo các thiết bị điều khiển điểm nút giao thông ngã mười. Pael của ấn Độ và các đồng sự đã dùng toán học mờ để phân biệt lời nói của người nói. Người Nhật Bản đã dùng toán học mờ để chẩn đoán bệnh cổ trướng, để điều khiển tàu điện ngầm, máy giặt quần áo, máy hút bụi, máy điều hoà không khí, nồi cơm điện v.v... Người Trung Quốc đã dùng toán học mờ để dùng vào việc dự báo khí tượng, chẩn đoán y học, trong công tác tình báo, chẩn đoán bệnh cổ trướng, công tác quy hoạch, điều khiển nhiệt độ lò, quản lí kinh doanh...

Toán học mờ không chỉ là không mơ hồ mà còn dùng phương pháp chính xác để nghiên cứu sự vật mơ hồ, là một môn khoa học có nhiều ứng dụng lí thú.

Từ khoá: *Toán học mờ.*

205. Hình hoa tuyết có bao nhiêu chiều?

Mọi người đều biết câu chuyện người mù sờ voi. Theo truyền thuyết, có ba người mù chưa

từng thấy một con voi lớn, thế nhưng họ lại muốn biết con voi lớn nhỏ ra sao, do đó họ nghĩ cách đi sờ voi. Một người sờ trúng đuôi voi, anh ta cho rằng con voi giống một con rắn. Người thứ hai sờ đúng tai voi, anh ta cho rằng con voi giống như chiếc quạt lớn. Người thứ ba sờ đúng chân voi, anh ta nghĩ ngay đến việc con voi giống như một cây cột đình.

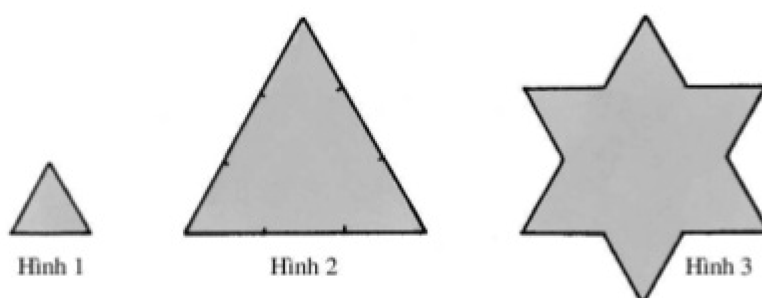
Câu chuyện về người mù sờ voi cảnh báo cho chúng ta về việc nhận thức sự vật không được đại khái mà phải nhìn từ nhiều phía. Nếu chúng ta dùng con mắt hình học trừu tượng để xem xét, ta có thể giải quyết vấn đề khái niệm số chiều. Đuôi voi chỉ có thể phân biệt được trên dưới là có một chiều. Tai voi như cái quạt có chiều trên dưới, có chiều trước sau nên có hai chiều. Chân voi có thể phân biệt trên dưới, trước sau, trái phải nên có ba chiều. Trong hình học các loại đường như đường thẳng, đường chu vi, chúng chỉ có một phương hướng độc lập đều có một chiều. Chỉ có thể hướng tới trước và hướng về sau. Đường cong có hai chiều phải có hai phương hướng độc lập: phương hướng chuyển động trước sau, hướng trái và hướng phải là hai hướng độc lập. Còn không gian mà người ta sinh sống có ba phương hướng độc lập: trước sau, trên dưới và trái phải tức có ba chiều. Vậy tiêu chí để đặc trưng cho số chiều thực tế là tiêu chí đặc trưng cho sự vật.

Thế đối với đường vẽ hoa tuyết sẽ ra sao? Vấn đề này được nhà toán học Thuỵ Điển là Ahe đã đưa vào mô hình của giới tự nhiên để đưa ra số chiều của đường vẽ hoa tuyết. Quá trình thực hiện như sau:

Giả sử E_O là tam giác đều có cạnh bằng 1. Ta chia cạnh E_O của tam giác thành ba phần đều nhau. Mỗi độ dài bằng $^1/_3$ cạnh tam giác cũ sẽ là cạnh của tam giác đều. Ta gọi hình tam giác trung gian có cạnh bằng là E_1. Ta lại làm như đã thực hiện với hình E, lại chia cạnh của E_1 thành 3 phần đều nhau, ta được tam giác E_2... và cứ thế tiếp tục. Khái quát lại với tam giác E_{k+1} sẽ có cạnh bằng $^1/_{3K+1}$ cạnh của tam giác E_K. Nếu K càng ngày càng lớn thì E_K sẽ ngày càng phức tạp và số răng của hoa tuyết sẽ trở nên ngày càng dày đặc. Sự thực thì cấu tạo của hoa tuyết sẽ trở nên vô hạn. Chỉ có điều vĩnh viễn người ta sẽ không đạt đến trạng thái lí tưởng.

Hiển nhiên "cái điều vĩnh viễn không thể đạt được đường cong lí tưởng" là không thể bàn cãi. Thế với một đường cong nói chung còn có điều gì đặc biệt nữa? Có. Trước hết đó là đường cong khép kín, giới hạn một khu vực mặt phẳng, có diện tích xác định. Thế cuối cùng đường ấy có độ dài bằng bao nhiêu? Xét theo quá trình cấu tạo ta có thể thấy mỗi bước thao tác đều làm tăng độ dài của đường cong thêm $^1/_3$ tức có độ dài bằng $^4/_3$ độ dài ban đầu. Tuỳ theo số bước thao tác tiếp tục sẽ làm cho độ dài của đường vẽ ngôi sao lớn đến vô hạn. Cuối cùng nếu ta thu hẹp tầm nhìn, tập trung ánh mắt vào một bộ phận của đường vẽ hoa tuyết ta sẽ phát hiện một điều kì lạ là đường vẽ ban đầu và phần cục bộ giống nhau. Đường vẽ hoa tuyết có những điểm đặc biệt như vậy chứng tỏ nó không phải là đường bình thường. Thực tế nó là một đường cong chia nhỏ hình (hay đường phân hình, hay fractan - *btv*).

Đối với một đường cong phân chia hình, ta không xem là đường cong có một chiều. Vì với đường cong vẽ hoa tuyết có thể nói đó là đường cong không có phương hướng. Phương hướng của đường cong tuỳ thuộc cách cấu tạo mà thay đổi vô số lần. Thế sẽ định nghĩa số chiều của đường này như thế nào? Chúng ta bắt đầu bằng việc nhìn cục bộ kết hợp với toàn thể.



Nếu ta tăng độ dài cạnh của một hình vuông có cạnh bằng 1 lên gấp đôi thì sẽ có $3^2 = 9$ hình

vuông cạnh bằng 1. Số chiều của hình sẽ là $D(Q) = {}^{\ln 9}/_{\ln 3} = 2$. Nếu tăng độ dài của khối lập phương cạnh bằng 1 lên gấp đôi thì sẽ có 3^3 hình lập phương cạnh bằng 1 và số chiều $D(C) = {}^{\ln 27}/_{\ln 3} = 3$. Điều này hoàn toàn phù hợp với quan niệm về số chiều đề ra từ ban đầu. Đối với đường cong vẽ hoa tuyết ta có thể xem xét theo cách tương tự, áp dụng cho đường cong vẽ hoa tuyết cấp *K*. *K* là do hình tam giác đều cạnh 1 đơn vị tạo nên (như hình 1). Nếu tăng độ dài của tam giác lên gấp đôi như ở hình 2 thì đường vẽ hoa tuyết sẽ tạo nên bốn hình cấp *K* và $D(K) = {}^{\ln 4}/_{\ln 3} = 1,26$. Nếu tăng độ dài cạnh đến gấp ba sẽ được đường vẽ ngôi sao như ở hình 3. Như vậy đường vẽ ngôi sao theo kiểu phân hình đã được tạo ra bằng cách như trình bày.

Cách vẽ ra phương thức phân chia hình của con đường vẽ hoa tuyết vạch rõ tính kì lạ của đường hoa tuyết.

Từ khoá: *Hình hoa tuyết.*

Đường nguyên còn gọi là đường glucogen – sinh thành từ đường glucoza mất nước – là một loại hidratcacbon quan trọng cung cấp năng lượng cho cơ thể.
2 trường hợp cần phân biệt: 1. trứng phân đôi thành 2 bào thai 2. 2 trứng riêng thành 2 bào thai độc lập.
Mẫu Trung Quốc khoảng bằng 667 m2; 1 ha gần bằng 15 mẫu Trung Quốc
Một số sách của Trung Quốc và thế giới lại chứng minh rằng chữ Hán 'Long' (rồng) là tượng hình của các con cá sấu. Ví dụ xem Chuyện đông chuyện tây tập 1 của An Chi.
Các chất xúc tác sinh học phi protêin được gọi là co-factor. Co-factor có bản chất hữu cơ đợc gọi là co-enzim. Hầu hết co-enzim là các hợp chất do các vitamin tạo thành hoặc tự thân nó là vitamin.
Một loài giống côn trùng xén tóc ở Việt Nam, thuộc họ cánh cứng.
Tiếng Hán gọi én và yến đều là yến. Tiếng Việt phân biệt chim én (chim di trú) và yến (chim làm tổ yến ở phía Nam Việt Nam như Nha Trang... không di cư như chim én).
Sang thế kỉ XXI ngành Kỹ thuật điện tử để tìm ra và đưa vào ứng dụng loại vật liệu cách điện cho các mạch tích hợp tốt hơn silic đioxit, đó là vật liệu high k (hằng số điện môi cao) như hafini oxit, hafini silicat. Loại này đã được hng Intel sử dụng trong CPU Atom có bán ở Việt Nam từ 2009 - btv.
Sang thế kỉ XXI, Pin Niken-Cađimi không được ưa chuộng nữa vì nó có cađimi là kim loại nặng, gây độc hại. Nhiều nước đã cấm dùng loại pin (ăcquy) này.
Hiện nay nước Pháp không dùng đồng frăng.
Từ “đạn đạo” ở đây thực ra là do từ “đạo đạn” nói ngược lại, có nghĩa là “đạn có dẫn đường”, hay “đạn tự hành”, “đạn tự đẩy” nó khác với từ “đạn đạo” trong cụm từ “tên lửa đạn đạo” mà theo tiếng Trung Quốc là “đạn đạo đạo đạn”, hai chữ “đạo” ở đây khác nhau, một chữ có nghĩa là “đường”, chữ thứ hai có nghĩa là “dẫn (đường)”, nghĩa đen của cụm từ “đạn đạo đạo đạn” là “đạn dẫn đường cho đầu đạn (hoặc bom) lắp ở trên nó, mà ta vẫn gọi là “tên lửa đạn đạo”- ND.
Toà nhà này đã bị các phần tử khủng bố dùng máy bay đánh sập ngày 11/9/2001 - ND
Toà nhà này đã bị các phần tử khủng bố dùng máy bay đánh sập ngày 11/9/2001 - ND
Georgé Pompidou (1911 - 1974), làm Tổng thống cộng hoà Pháp trong các năm từ 1969 đến 1974 - ND
Bệnh mụn nhỏ ngoài da thành từng mảng, có màu đỏ gọi là xích điến, màu trắng là bạch điến, màu tím là tử điến
Xem chú thích về rad và Gy tại mục 180 trang 371
Sinh quyển số 2 (Biosphere 2) theo Wikipedia có diện tích xây dựng là 12.700 m2, chi phí khoảng 200 triệu USD; có mục đích nghiên cứu khả năng con người sống và làm việc được trong sinh quyển kín, tiến hành những thí nghiệm khoa học.
Ở Việt Nam, theo chỉ thị 20/2000/CT-TTg, đã cấm dùng xăng pha chì trên toàn quốc từ ngày 01/11/2001.
Ngày nay (từ tháng 8 năm 2006) Diêm Vương Tinh bị giáng cấp xuống thành hành tinh lùn
Ngày nay Hội Thiên văn Quốc Tế đã không còn coi nó là hành tinh nữa.
Ở Việt Nam gọi cây này là cây dây leo vạn niên thanh, thường trồng để trang trí.
Theo quan niệm mới nhất thì nấm thuộc một giới riêng, độc lập với giới thực vật. Đó là giới nấm.
Nhiễm sắc thể. Thể nhỏ ở dạng lông que xuất hiện khi tế bào phân chia gián tiếp (phân chia có lông) và dễ bị nhuốm màu bởi chất nhuộm kiềm tính. Được tạo nên bởi sự cuốn quanh xếp chồng lên nhau của sợi tơ chất nhiễm sắc dài và mảnh. Và do axit nucleic cùng protein tạo thành, là cơ sở vật chất chủ yếu của di truyền. Nhiễm sắc thể của các loại sinh vật có số lượng, hình dáng, kích thước nhất định. Tế bào thể thường là song bội thể, có hai nhóm nhiễm sắc thể. Tinh và noãn là đơn bội thể, chỉ có một nhóm nhiễm sắc thể. Trong cá thể đực cái khác nhau thì nhiễm sắc thể chia ra hai loại: nhiễm sắc thể giới tính quyết định đến tính trạng giới tính và nhiễm sắc thể thường. Ví dụ tế bào thể của người có 46 nhiễm sắc thể, trong đó có 44 cái là nhiễm sắc thể thường, 2 cái là nhiễm sắc thể giới tính. Nam có 1 nhiễm sắc thể X và 1 là Y. Nữ có 2 nhiễm sắc thể giới tính X.
ATP (adenozin triphotphat) $C_{10}H_{16}N_5O_{12}P_3$: co-enzim, là hợp chất cao năng lượng của tế bào
Bây giờ RAM cỡ 1 GB là bình thường (btv).
Hiện nay đang dùng loại pin Li-ion không nạp để cấp nguồn cho CMOS. Các loại pin (ắc quy) Ni-Cd được khuyến cáo gây độc hại không sử dụng nữa (Btv).
Mạng trung kế: Mạng tiếp sức, chuyển tiếp sóng (Relay). “Kế” ở đây là kế tục, từ Hán này hiện nay ở Việt Nam ít dùng, nó chỉ còn lưu hành trong những người lớn tuổi ngành bưu điện.
Lầu Quan Tước: Nhà lầu cạnh ba tầng ở phía Tây Nam huyện Vĩnh Tố, tỉnh Sơn Tây, Trung Quốc
Bàn thất xảo:bàn có 7 điểm tinh xảo
Ma trận còn được gọi là ma trận vuông
Sét hay chớp là hiện tượng phóng điện giữa các đám mây hoặc giữa mây và mặt đất. Trong tiếng Việt có chỗ phải dùng sét như “sét đánh”, “sét cầu”..., có chỗ phải dùng chớp như “mưa giông chớp giật”...
Ba: chỉ Ba Thục, là tên gọi của tỉnh Trùng Khánh, Tứ Xuyên trước kia
Nước ta có giàn đàn đá được phát hiện tại huyện Khánh Sơn, tỉnh Khánh Hoà cũng là một nhạc cụ cổ xưa

quý hiếm, tương tự như giàn đàn chuông nói trên của Trung Quốc (Chú thích của ND).
Tốc độ truyền âm trong không khí khoảng 331 m/s ở điều kiện nhiệt độ 0°C, độ cao trên mực nước biển.
Âm thanh vòng (âm thanh vòm) tạo cho người nghe cảm nhận rõ rệt về âm thanh 3 chiều có chuyển động vòng.